

Amigos si, pero... a vaquiña polo que vale?

Traballo realizado por Alba Lema, Paula González e Nahir Parga, alumnas de 4º ESO do CPI As Revoltas. Coa gran colaboración de Milagros Diéguez, profesora de matemáticas.



Tabla de contenido

AMIGOS SI, PERO... A VAQUIÑA POLO QUE VALE?	1
RESUMO	3
DESCRIPCIÓN DA RECOLLIDA DE DATOS	3
▪ PREPARACIÓN DO PROXECTO	3
ANALISE ESTADÍSTICA E INTERPRETACIÓN DOS RESULTADOS	4
▪ A NOSA POBOACIÓN	4
▪ SECUNDARIA:	4
<i>Primeira fase :</i>	4
<i>Segunda fase:</i>	5
<i>Terceira fase:</i>	6
▪ PRIMARIA	8
<i>Primeira fase</i>	8
<i>Segunda fase:</i>	9
PLAN EXPERIMENTAL	10
▪ HURNA CON BOLAS (SUCESOS ELEMENTAIS EQUIPROBABLES)	11
▪ MONTY HALL	13
▪ CHINCHETAS (SUCESOS NON EQUIPROBABLES)	15
▪ AGULLA DE BUFFON	16
▪ CRUZAR O RÍO	17
▪ DADO E HURNAS	19
CONCLUSIÓNS E POSIBLES MELLORAS DO PROXECTO	21
RECURSOS UTILIZADOS	21

Notese que anque aparecen 21 páxinas a 1^a correspóndese coa portada.

Resumo

Neste proxecto tratamos de averiguar se os nosos compañeiros de instituto colaboran cando se lles pide axuda ou veñen polas contraprestacións que poidan obter.

Para dar resposta a nosa pregunta contruímos una serie de xogos de probabilidade e pedimoslle que colaborasen con nos facendo os experimentos para despois presentar os resultados a un concurso.

A conclusión foi claramente que, **amiguiños sí, pero se hai recompensa!**, e dicir cremos que os nosos compañeiros responden mellor se hai premio.

Descrición da recollida de datos

O proxecto ten dúas ramas ben diferenciadas, por una banda fixemos una sondaxe para analizar a resposta dos nosos compañeiros ante a nosa solicitude de colaboración e por outra un plan experimental no que tratamos de comprobar empíricamente como a frecuencia relativa vai cara a probabilidade.

O estudo do comportamento da xente está dividido en tres fases:

- **Primeira fase:** Cartel na porta e pedíndolle persoalmente colaboración.
- **Segunda fase:** Saindo polo patio cun altofalante e dando regalos aos que participan.
- **Terceira fase** (premio a constancia): Os que viñesen colaborar durante dez recreos entrarían nun sorteo dunha tarxeta Google Play.

▪ Preparación do proxecto

Comenzamos preparando os experimentos que tiñan que realizar os nosos posibles colaboradores.



Os nosos experimentos eran:

- Hurna con bolas.
- Dado e hurnas.
- Chinchetas.
- Agulla de Buffon.
- Moeda e hurnas.
- Dados.
- Cruzar o río.
- Monty Hall.
- Calcetíns.
- Baralla de cartas.
- Tabas.



Elaboramos os xogos, preparamos a clase e redactamos os formularios, tanto dos xogos como da investigación que nos interesaba a da afluencia dos nosos compañeiros.

Analise estatística e interpretación dos resultados.

▪ A nosa poboación

Partiamos una poboación de 94 alumnos de secundaria e 140 de primaria. Os experimentos realizaranse por separado, mentres que cos de secundaria levaríase a cabo a investigación durante varios días, con primaria adicariámoslle 2, un simplemente invitándoos a colaborar e un segundo día con premio pola participación.

▪ Secundaria:

Foron 145 veces¹ as que se realizaron os experimentos por parte dos nosos compañeiros que por curso se distribuían da seguinte forma:

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	3º PEMAR	4ª A	4ª B	Conserxe	Profesores	Total
Frecuencia	39	27	12	0	25	37	2	3	145
Porcentaxe	26,90%	18,62%	8,28%	0,00%	17,24%	25,52%	2,07%	1,38%	100,00%

Alalizamos a continuación os resultados nas distintas fases das que constaba o experimento

Primeira fase :



- **Duración:** 8 días (16 recreos).
- **Motivación:** Cartel anunciando na porta da aula e solicitude de colaboración persoalmente..

Durante estes días os nosos xogos tiveron ben pouco éxito, os datos por día están reflexados na seguinte taboa de continxencia².

Días/Curso	1º ESO	3º ESO	4ª A	4ª B	TOTAL
1	0	0	3	0	3
2	0	0	2	0	2
3	0	0	1	1	2
4	0	1	1	0	2
5	0	1	0	1	2
6	0	1	0	2	3
7	1	0	1	1	3
8	0	0	7	1	8
TOTAL	1	3	15	6	25

Cabe observar que das 25 persoas que viñeron 15 eran compañeiros da nosa clase e non veu ninguén de 2º ESO nin de PEMAR.

¹ Falamos de veces no lugar de individuos porque podían vir canto quixeran mentres duraba o

² Excluimos aos profesores porque non forman parte do noso estudo.

Segunda fase:

- **Duración:** 3 días (6 recreos).
- **Motivación:** Salimos cun altofalante³ polo patio e regalabamos uns aneis de ollos, uns lápices con bonecos e un bolígrafo con ventilador.

Graficamente poderíamos ilustrar a reacción dos nosos compañeiros observando as fotos



O interés dos nosos compañeiros por colaborar cambiou radicalmente,ate o conserxe (Juan) quixo probar os nosos xogos.

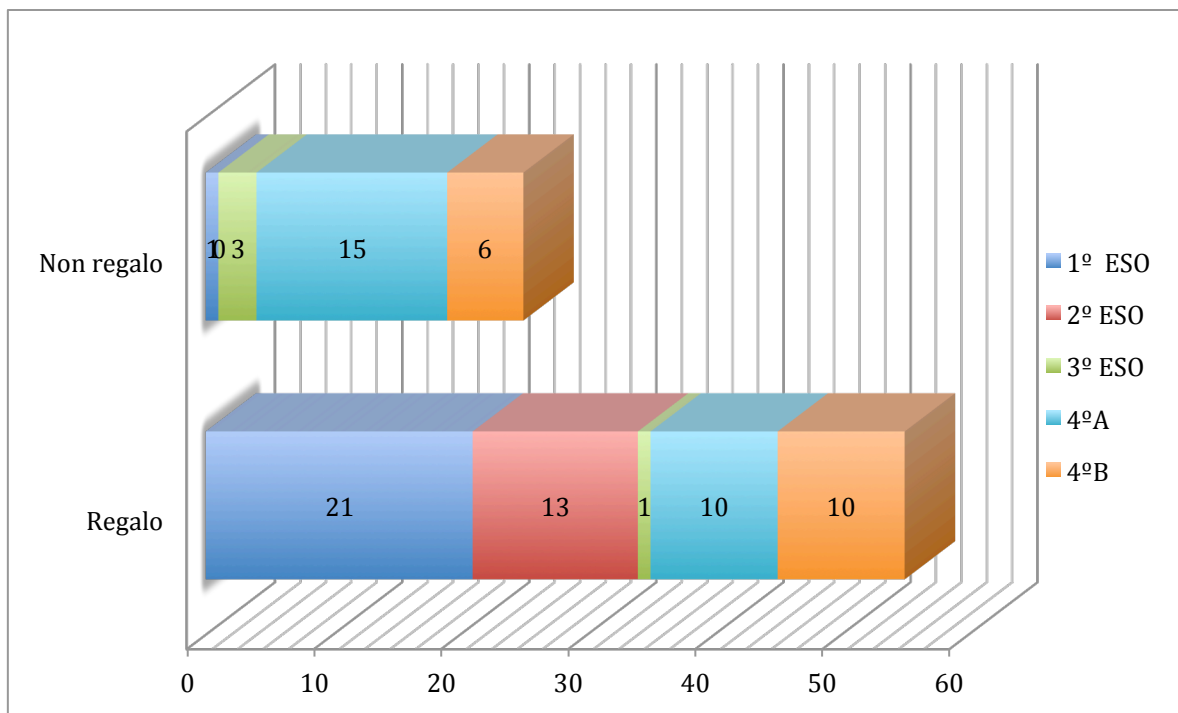
Temos que sinalar ademáis que nestes días apenas participaban as nosas compañeiros de clase dado que debido a que non dabamos rexistrado todos os datos pedimoslle que nos axudasen.

Observando a taboa da fase anterior e a seguinte podemos ver que pasamos de ter 25 alumnos en 8 días o que lle correspondería una media de 3,125 a ter 55 en 3 días que lle correspondería una media diaria de 18,33 alumnos.

	1º ESO	2º ESO	3º ESO	3º PEMAR	4º A	4º B	Total
Frecuencia	21	13	1	0	10	10	55
Porcentaxe	38,18%	23,64%	1,82%	0,00%	18,18%	18,18%	100,00%

Comparamos gráficamente as dúas fases do proxecto:

³ Enlace video: https://youtu.be/amTw_pdV6mY



Na gráfica observase que houbo un gran incremento da asistencia en casi todos os grupos, nomeadamente nos de 1º e 2º da ESO que pasaron de 1 a 21 e de 0 a 13 respectivamente, baixou a afluencia de 3º ESO e de 4º A, pero esta última está xustificada porque como xa dixemos pedimoslle que nos axudasen a rexistrar os datos dos xogos que estábamos a realizar.

Terceira fase:

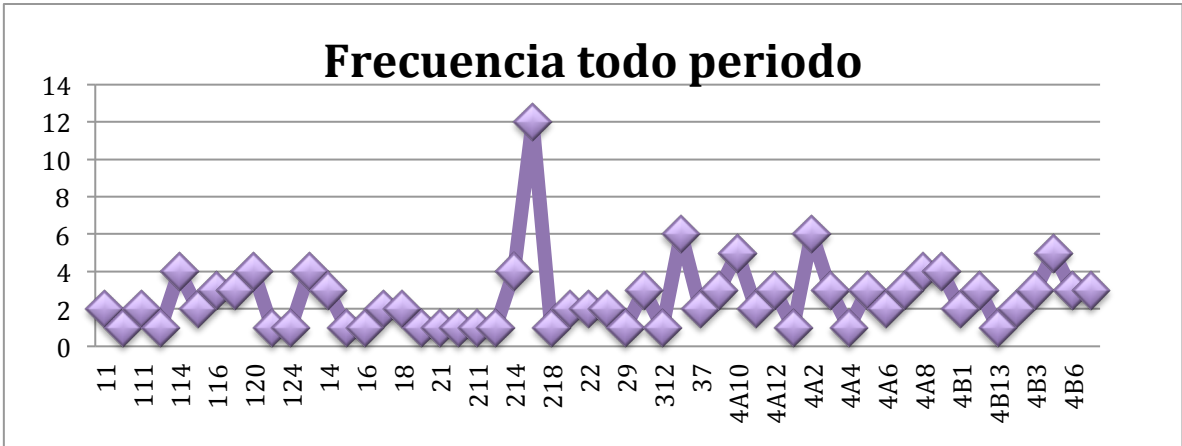
- **Duración:** 8 días (16 recreos).
- **Motivación:** Sorteio dunha tarxeta GooglePlay entre os que acudiran a colaborar durante 10 recreos.

Nesta fase aumentaron o número total de veces que viñeron a facer os experimentos

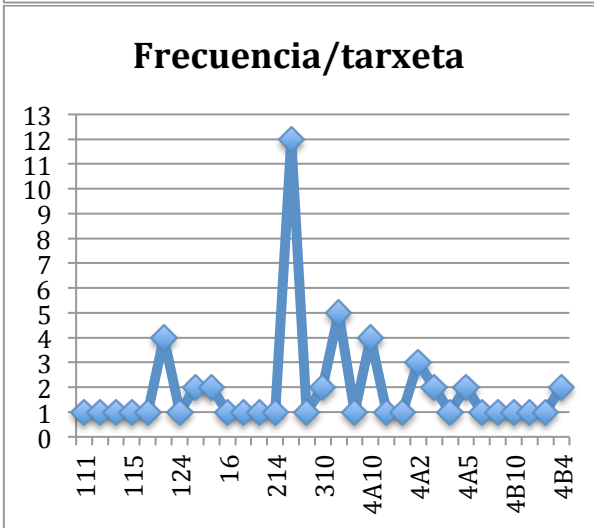
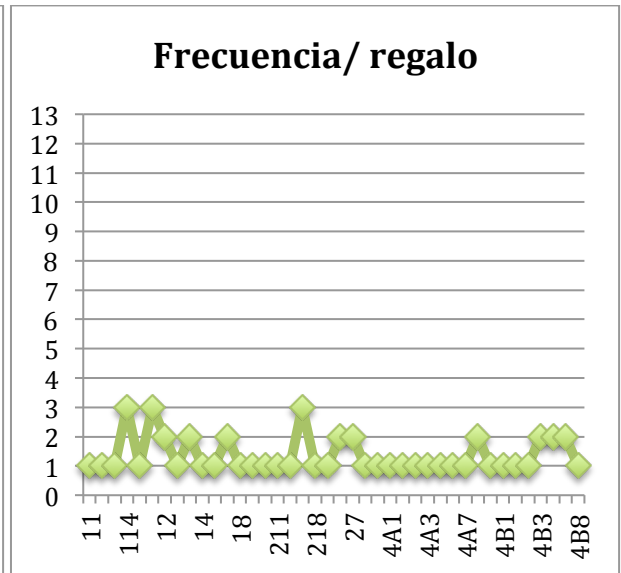
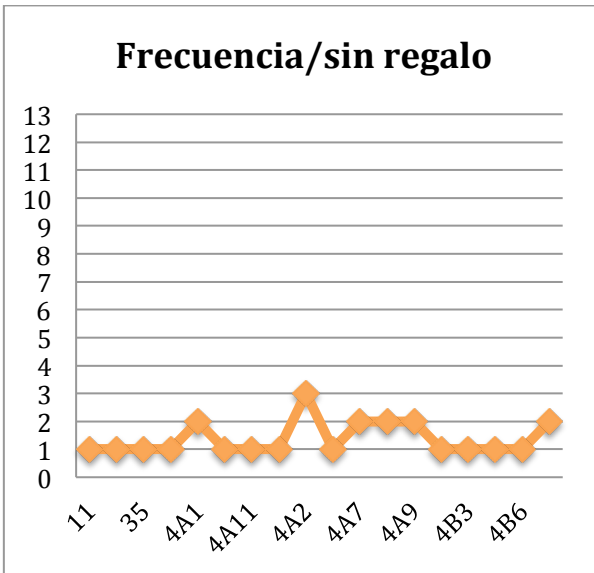
	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º A	4º B	Total
Frecuencia	17	14	8	15	6	60
Porcentaxe	28,33%	23,33%	13,33%	25,00%	10,00%	100%

Sobre todo en 3ª da ESO, pero realmente aumentou o número de personas que colaboraban con nos?

Nesta ocasión en vez de comparar coas etapas anteriores as veces que se fixeron os experimentos, imos estudar a frecuencia coa que acudiron cada un dos nosos compañeiros.



Esta gráfica parece refletir que determinados compañeiros veñen a visitarnos con máis frecuencia que outros. Pero vexamolo detalladamente.



Ao observar as tres gráficas a un tempo podemos ver claramente como evolúu o comportamento dos nosos compañeiros. Na primeira etapa ademais de vir poucos compañeiros a frecuencia coa que acuden é maiormente 1 e como máximo 3 veces. Na gráfica verde vese que aumenta considerablemente a cantidade de alumnos que nos visitan pero a frecuencia e similar ao caso anterior, é a gráfica azul a que nos mostra un gran aumento da frecuencia nomeadamente no caso do alumno 215 que nos visita 12 veces.

A vista dos resultados podemos concluir que os nosos compañeiros acudían a axudarnos sobre todo cando había recompensa.

▪ Primaria

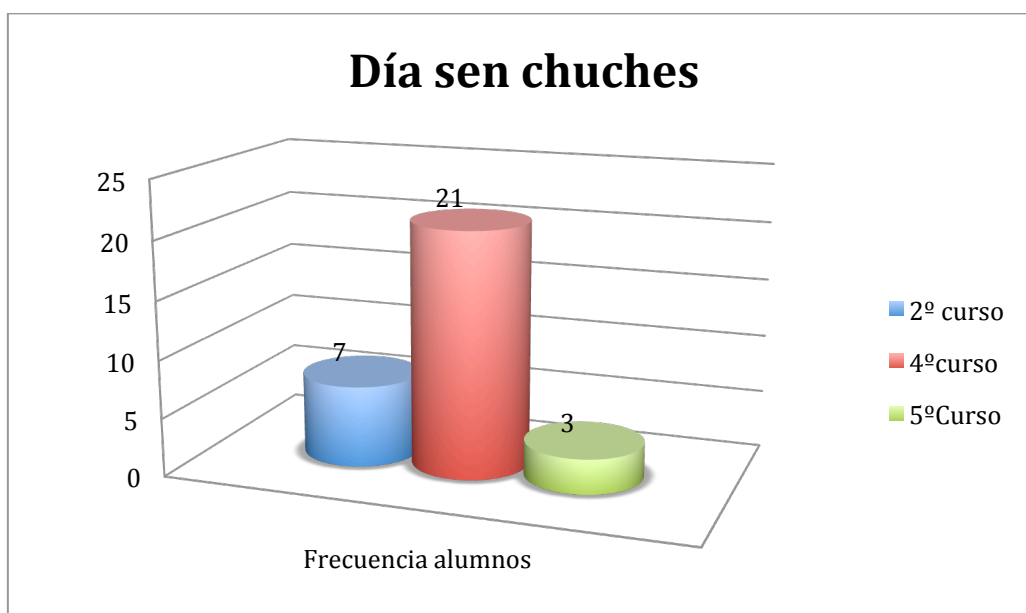
Curso	Frecuencia	Porcentaxe
2º	7	9,09%
3º	3	3,9%
4º	37	48,05%
5º	19	24,68%
6º	11	14,29%
TOTAL	77	100%

Durante os dous recreos que realizamos o experimentos cos alumnos de primaria viñeron un total de 77 alumnos, distribuidos como indica a taboa anterior, a moda é 4º curso e representa o 48% da poboación que nos visitou de primaria. Están ausentes os de infantil e primeiro dado que no recreo están nun patio distinto ao que se realizaron os experimentos.

Primeira fase

Duración: un recreo

Motivación: chamalos para que viñesen a xogar.



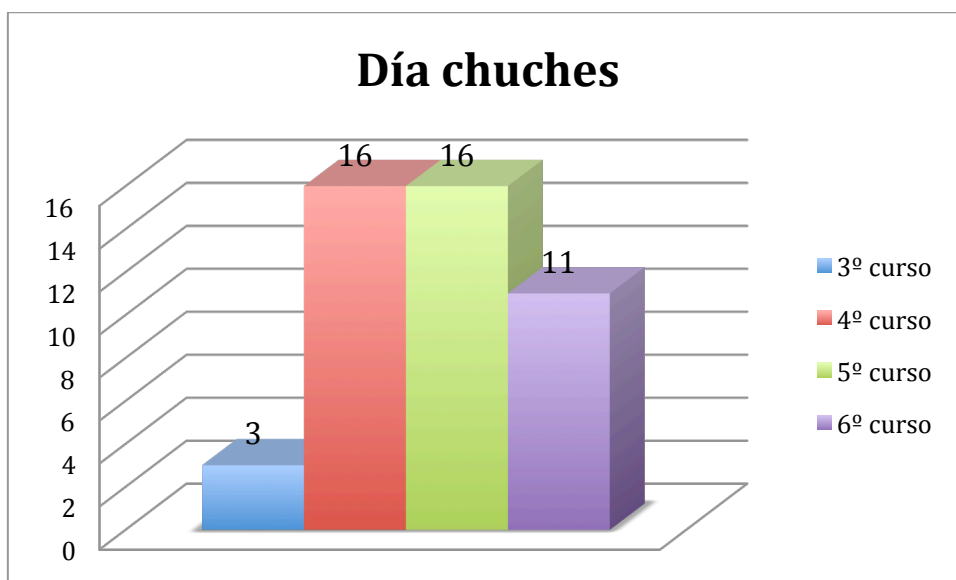
Este día viñeron un total de 31 alumnos dos cursos, e parece que os alumnos de 3º nin de 6º non tiñan interese en participar nos nosos xogos.

Segunda fase:

Duración: Un recreo

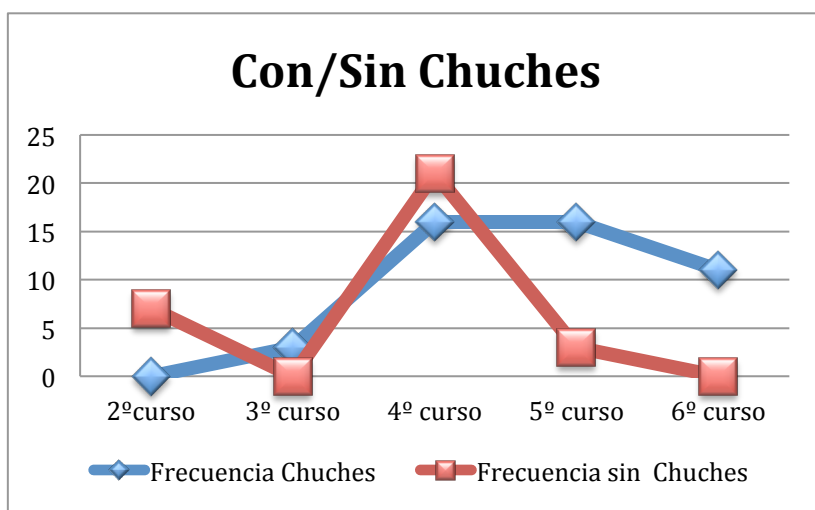
Motivación: Aos que viñan a xogar dabámoslle gominolas.

Vexamos agora o día con chuches



Este día os alumnos e alumnas de primaria mostraron máis interés polos nosos xogos, uníronse os de 6º e os de terceiro polo pola contra os de 2º esta vez non acudiron. Cuarto e quinto representan a maior porcentaxe de afluencia cun 34,78%.

Comparamos ambas etapas



A vista dos resultados no caso de primaria nos se mostran tan motivados polo premio como os de secundaria xa que si ben é certo que a participación subíu na maioría dos cursos, en 2º e cuarto curso de primaria foi máis baixa sendo nula para os alumnos de 2º de primaria.

PLAN EXPERIMENTAL

Como se mencionou ao principio elaboramos unha serie de xogos cos que tratábamos de ver como a frecuencia relativa se aproxima a probabilidade despois de realizar en moitas ocasións os experimentos.

Eran un total de once xogos pero anque recollemos datos de todos eles non tivemos tempo de analíalos todos así que incluiremos aquí os resultados que obtivemos con algúns deles.

▪ **Hurna con bolas (Sucesos elementais equiprobables)**

Experimento: extraer una bola e comprobar a cor.

Tiñamos una hurna con 29 bolas 5 vermellas, 12 azuis, 4 amarelas e 8 verdes, o experimento consistía en extraer una bola e anotar a cor.



Segundo a Lei de Laplace as distintas probabilidades para o noso caso serían:

- $P(\text{Amarela}) = \frac{4}{29}$
- $P(\text{azul}) = \frac{12}{29}$
- $P(\text{Vermella}) = \frac{5}{29}$
- $P(\text{verde}) = \frac{8}{29}$

Fixemos 1714 extraccións e os resultados que obtivemos foron en frecuencia absoluta e relativa:

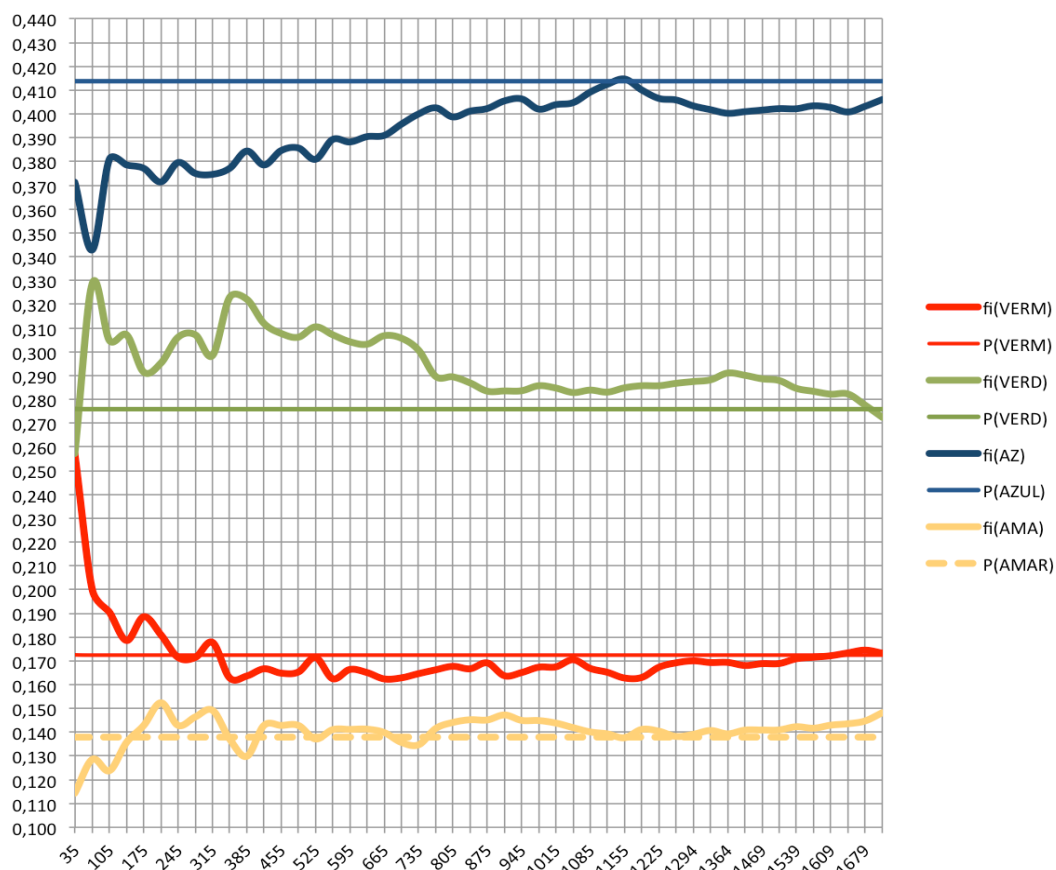
Frecuencia Absoluta

N	f(VERM)	f(VERD)	f(AZUL)	f(AMA)	N	f(VER)	f(VERD)	f(AZUL)	f(AMA)
35	9	9	13	4	875	148	248	352	127
70	14	23	24	9	910	149	258	369	134
105	20	32	40	13	945	156	268	384	137
140	25	43	53	19	980	164	280	394	142
175	33	51	66	25	1015	170	289	410	146
210	38	62	78	32	1050	179	297	425	149
245	42	75	93	35	1085	181	308	444	152
280	48	86	105	41	1120	185	317	462	156
315	56	94	118	47	1155	188	329	479	159
350	57	113	132	48	1190	194	340	488	168
385	63	124	148	50	1225	205	350	498	172
420	70	131	159	60	1259	213	361	511	174
455	75	140	175	65	1294	220	372	522	180
490	81	150	189	70	1329	225	383	534	187
525	90	163	200	72	1364	231	397	546	190
560	91	172	218	79	1434	241	416	575	202
595	99	181	231	84	1469	248	424	590	207
630	104	191	246	89	1504	254	433	605	212
665	108	204	260	93	1539	263	438	619	219
700	114	214	277	95	1574	270	446	635	223
735	121	221	294	99	1609	277	454	648	230
770	128	223	310	109	1644	285	464	659	236
805	135	233	321	116	1679	293	466	677	243
840	140	241	337	122	1714	297	467	696	254

N	fi(VERM)	fi(VERD)	fi(AZ)	fi(AMA)	N	fi(VERM)	fi(VERD)	fi(AZ)	fi(AMA)
35	0,257	0,257	0,371	0,114	875	0,169	0,283	0,402	0,145
70	0,200	0,329	0,343	0,129	910	0,164	0,284	0,405	0,147
105	0,190	0,305	0,381	0,124	945	0,165	0,284	0,406	0,145
140	0,179	0,307	0,379	0,136	980	0,167	0,286	0,402	0,145
175	0,189	0,291	0,377	0,143	1015	0,167	0,285	0,404	0,144
210	0,181	0,295	0,371	0,152	1050	0,170	0,283	0,405	0,142
245	0,171	0,306	0,380	0,143	1085	0,167	0,284	0,409	0,140
280	0,171	0,307	0,375	0,146	1120	0,165	0,283	0,413	0,139
315	0,178	0,298	0,375	0,149	1155	0,163	0,285	0,415	0,138
350	0,163	0,323	0,377	0,137	1190	0,163	0,286	0,410	0,141
385	0,164	0,322	0,384	0,130	1225	0,167	0,286	0,407	0,140
420	0,167	0,312	0,379	0,143	1259	0,169	0,287	0,406	0,138
455	0,165	0,308	0,385	0,143	1294	0,170	0,287	0,403	0,139
490	0,165	0,306	0,386	0,143	1329	0,169	0,288	0,402	0,141
525	0,171	0,310	0,381	0,137	1364	0,169	0,291	0,400	0,139
560	0,163	0,307	0,389	0,141	1394	0,168	0,290	0,401	0,141
595	0,166	0,304	0,388	0,141	1469	0,169	0,289	0,402	0,141
630	0,165	0,303	0,390	0,141	1504	0,169	0,288	0,402	0,141
665	0,162	0,307	0,391	0,140	1539	0,171	0,285	0,402	0,142
700	0,163	0,306	0,396	0,136	1574	0,172	0,283	0,403	0,142
735	0,165	0,301	0,400	0,135	1609	0,172	0,282	0,403	0,143
770	0,166	0,290	0,403	0,142	1644	0,173	0,282	0,401	0,144
805	0,168	0,289	0,399	0,144	1679	0,175	0,278	0,403	0,145
840	0,167	0,287	0,401	0,145	1714	0,173	0,272	0,406	0,148

Frecuencia Relativa

Vexamos gráficamente como se comportaron as frecuencias relativas /probabilidade

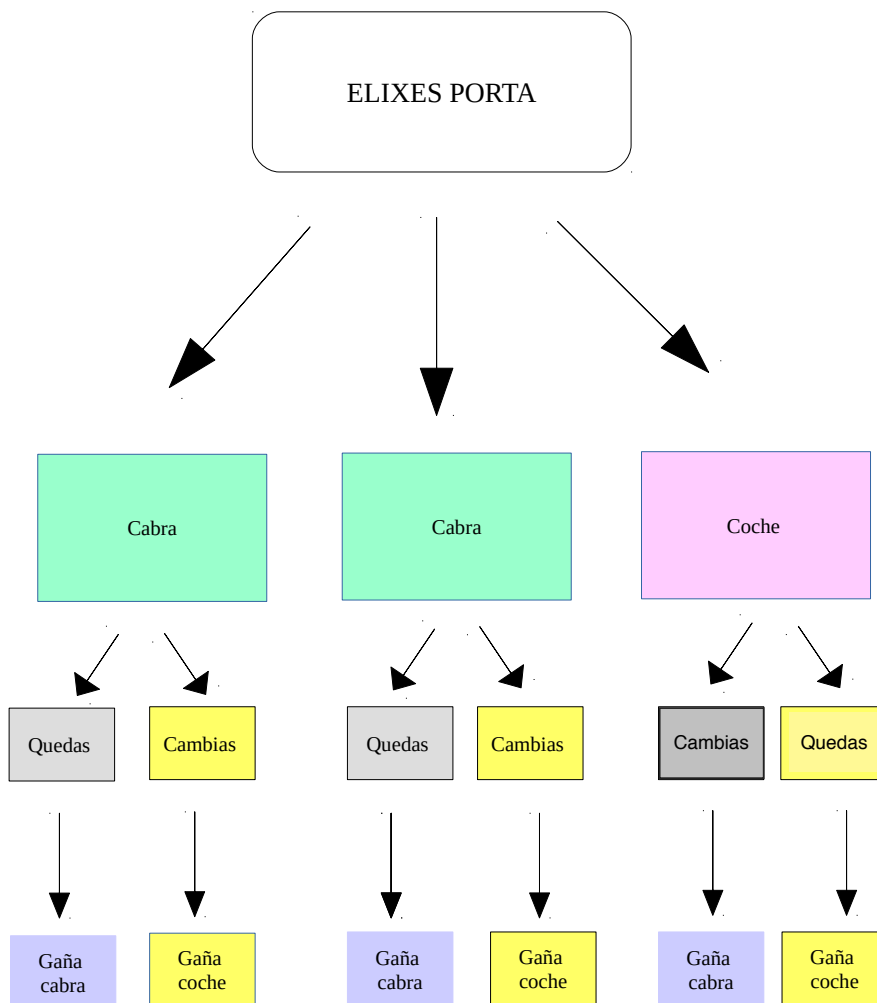


Obtivemos unha bastante boa aproximación sobre todo para as bolas vermella e amarela no caso da verde chega a ser coincidentes a frecuencia relativa e a probabilidade para as 1704 extraccións, en canto a vermella parece que xa tende a estabilizarse en torno ao valor da probabilidade.

▪ Monty Hall



Este experimento é o coñecido concurso de Monty Hall, no que os concursantes deben es-
coller unha porta despois do que o presentador descubre o que hai detrás doutra que con-
tén unha cabra e ofrecelle ao concursante a posibilidade de cambiar a súa elección.
Vemos cun gráfico as distintas posibilidades e calculamos a probabilidade de gañar.



Chamamos :

- G ao suceso gañar coche.
- A suceso escolle porta co coche na 1ª elección.
- B suceso escolle porta coa cabra na 1ª elección.

A probabilidade de gañar coche sería:

$$P(G)=P(G/A)\cdot P(A)+P(G/B)\cdot P(B)$$

Sendo a $P(A)=1/3$ é $P(B)=2/3$ temos:

Se non cambia

$$P(G/A)=1 \quad P(G/B)=0$$

$$P(G)=1\cdot 1/3+0\cdot 2/3=1/3$$

Se cambia

$$P(G/A)=0 \quad P(G/B)=1$$

$$P(G)=0\cdot 1/3+1\cdot 2/3=2/3$$

Que resultados obtivemos nos?

Repetimos o experimento en 1426 ocasións, 620 coas portas que fixemos e as restantes nun simulador dunha páxina web, e cos resultados obtidos fixemos unha taboa de continxencia no Epidat que nos deu os seguintes resultados

	Non Acerta	Si Acerta	Total
Non Cambia	417	309	726
Si Cambia	289	411	700
Total	706	720	1426

No total das extraccións quedamos un pouco lonxe dos 2/3 buscados para a probabilidade de gañar cambiando de porta o que si podemos concluir que cando cambia gaña en máis ocasións que se mantén a súa primeira elección.

▪ Chinchetas (Sucesos non equiprobables)

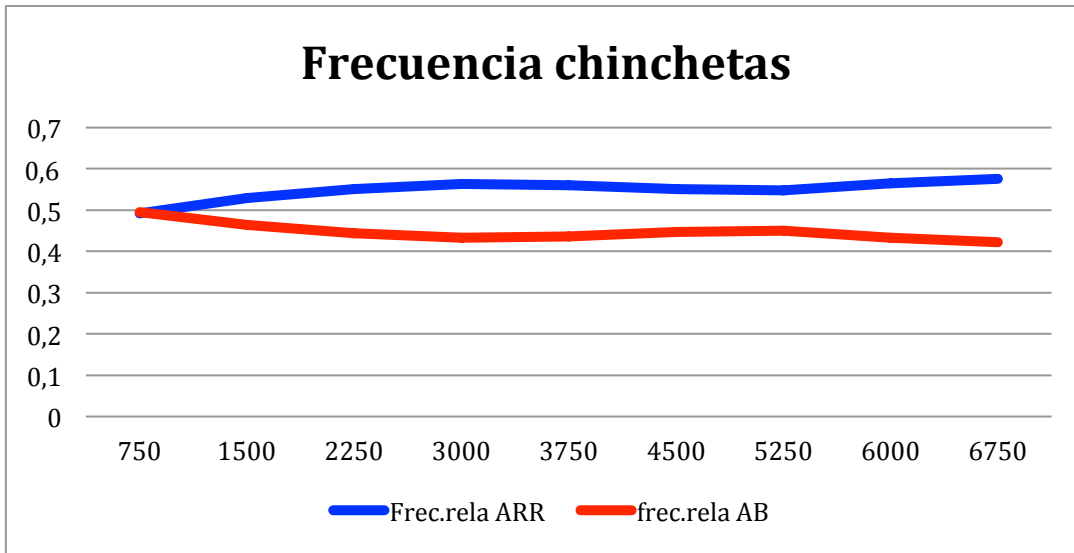


Este experimento consistía en lanzar 25 chinchetas de cada vez e contar cantas caían cara arriba e cantas cara abaixo. Neste caso non pasa como na extracción de bola da hurna xa que os sucesos elementais non teñen a mesma probabilidade.

Para as nosas chinchetas as frecuencias relativas que obtivemos son as que se recollen na seguinte taboa.

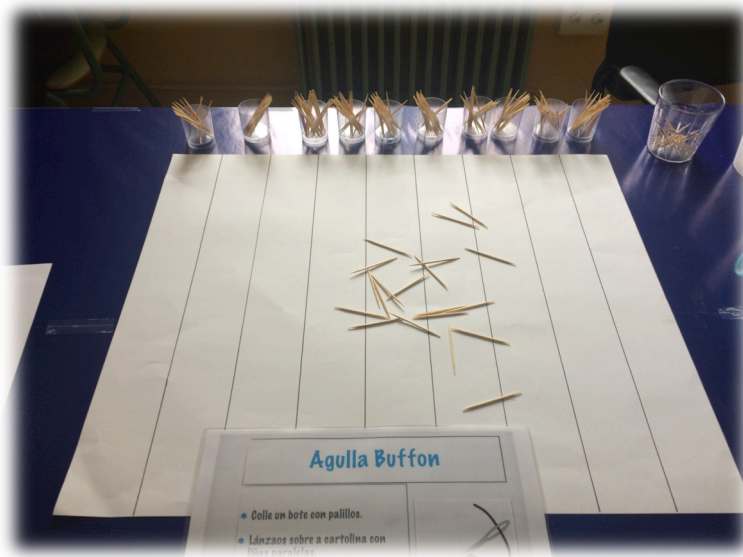
	750	1500	2250	3000	3750	4500	5250	6000	6750
Frec.rel.ARR	0,49	0,53	0,55	0,56	0,56	0,55	0,55	0,56	0,58
Frec.rela AB	0,5	0,46	0,44	0,43	0,44	0,45	0,45	0,43	0,42

A frecuencia coa caían as nosas chinchetas cara arriba vai cara 0,6 mentres que cara abaixo parece ir cara 0,4. Ademais a suma de cada columna esta moi próxima a 1, dado que os dous sucesos son complementarios. Este último feito vese reflectido na simetría das gráficas:



▪ Agulla de Buffon

Tratase do clásico problema de probabilidade proposto polo Conde de Buffon e o que nos fixemos foi:



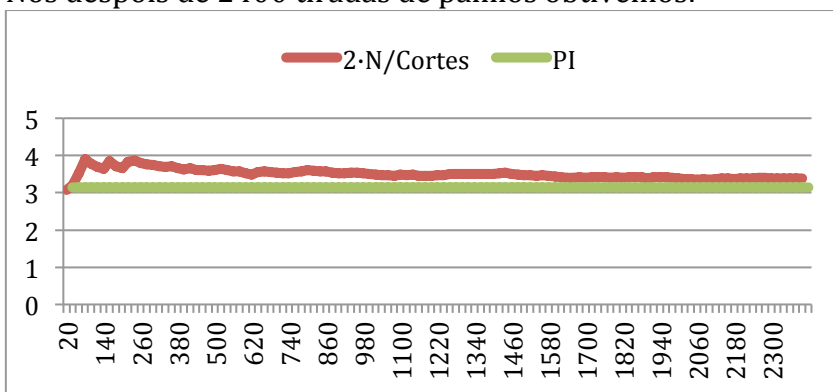
Nunha cartulina trazamos rectas paralelas cunha separación entre elas igual a lonxitude dun palillo.

Cada vez lanzábase 20 paliños e anotábase cantos cortaban as liñas.

O que pretendíamos demostrar é que a probabilidade de corte é $2/\pi$

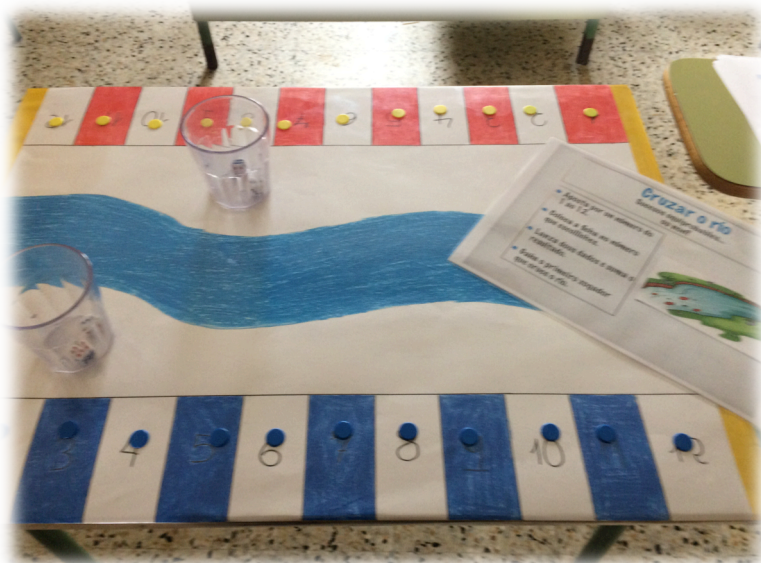
.Ou equivalentemente que se multiplicamos por dous o cociente $\frac{\text{tiradas}}{\text{cortes}}$ obtemos π

Nos despois de 2400 tiradas de palillos obtivemos:



Imonos aproximando ao valor de Pi anque precisariamos moitas máis tiradas para que esta aproximación fose maior. O que si se deixa ver é como tendemos cara este valor

▪ Cruzar o río



O xogo consistía nun taboleiro con cuadros numerados do 1 ao 12, dous dados e 12 fichas de dúas cores ditintas.

Tiñamos dúas versión do xogo, una na que mandábamnos a cada un dos dous xogadores colocar una ficha en cada casiña debían lanzar dous dados e sumar os resultados das caras superiores. Este número indicaría a ficha que podían mover para a casiña correspondente do seu adversario, o primeiro que fose capaz de cruzar todas as fichas gañaría o xogo.

Evidentemente non é posible gañar dado que coa suma dos resultados dos dados nunca poderemos obter un 1.

Unicamente unha compañeira de cuarto se decatou de que o 1 era un suceso imposible, a todos os demais deixabámoslos xogar un pouco e despois advertíamoslles deste comezando de novo o xogo na súa segunda versión que consistía en apostar por un número colocando alí a súa ficha seguindo o mesmo procedemento que antes gañaría o que primeiro cruzase o río coa súa ficha.

Os posibles resultados deste xogo son

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

As distintas probabilidades:

$$P(2)=1/36$$

$$P(3)=1/18$$

$$P(4)=1/12$$

$$P(5)=1/9$$

$$P(6)=5/36$$

$$P(7)=6/36$$

$$P(8)=5/36$$

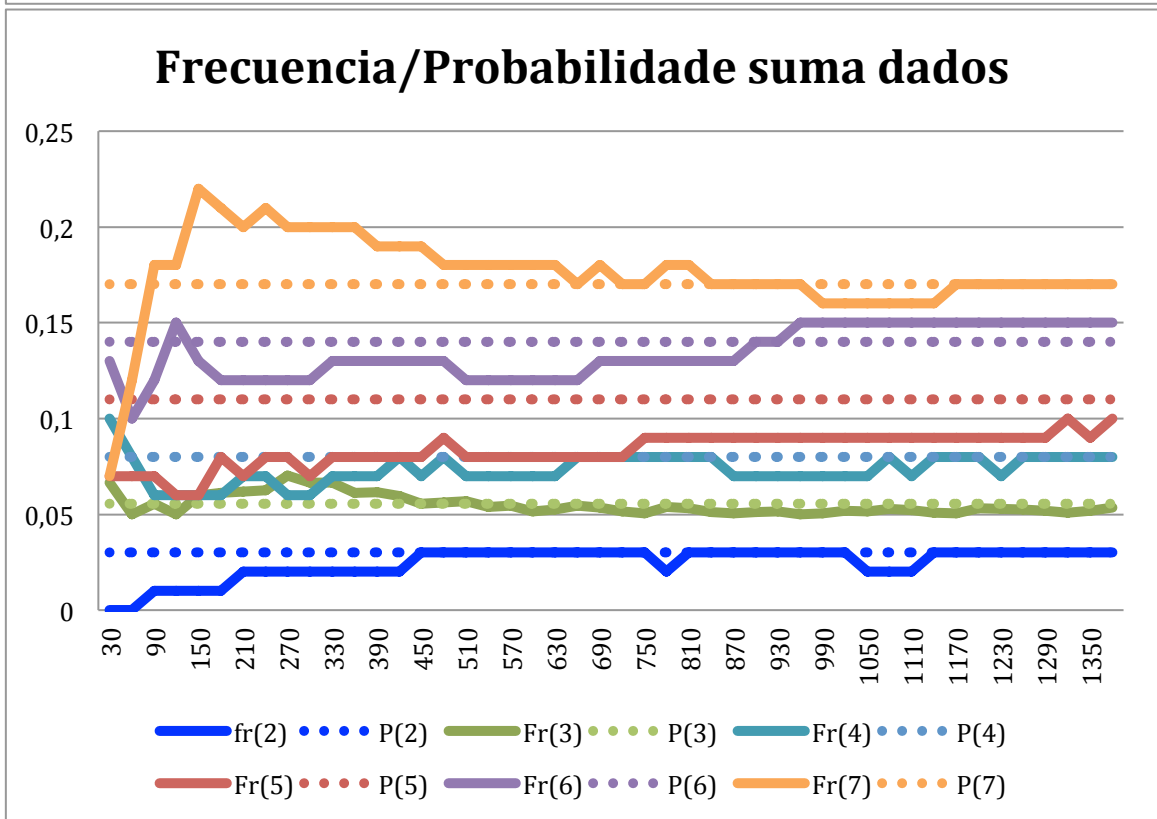
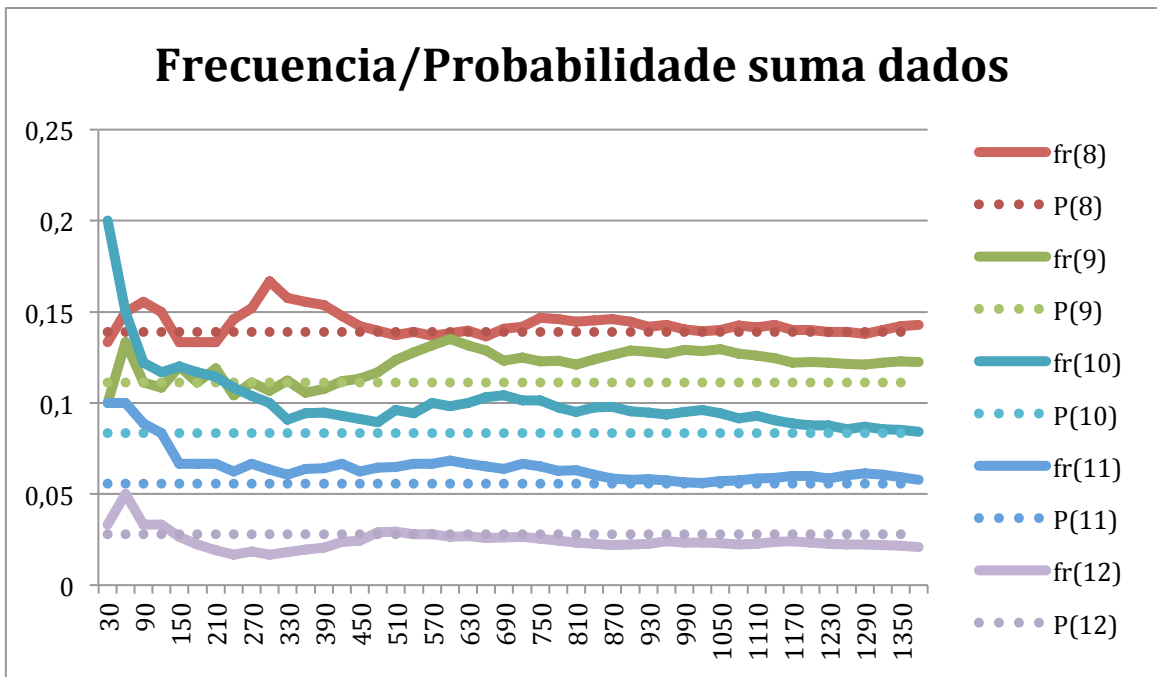
$$P(9)=1/9$$

$$P(10)=1/12$$

$$P(11)=1/18$$

$$P(12)=1/36$$

Fixéronse 1380 tiradas e as frecuencias relativas que obtivemos reflexámoslas nunhas gráficas a continuación comparadas coa probabilidade:



As gráficas muestran que después de 1380 tiradas de Dados conseguimos una buena aproximación de la frecuencia relativa a las respectivas probabilidades.

▪ Dado e hurnas

Neste experimento tiñamos un dado e 2 urnas con bolas configuradas da seguinte forma:

- Hurna azul: 13 vermellas, 7 verdes, 5 azuis e 6 amarelas.
- Hurna amarela: 12 azuis, 5 amarelas, 4 verdes, 10 vermellas.



Lanzamos o dado se sae 1,2,3 ou 4 extremos bola da hurna azul, se sae 5 ou 6 extraemos bola da hurna amarela.

A distintas probabilidades serían:

Probabilidade extracción Bola Vermella

$$P(BV) = P(BV/H_{AZ}) \cdot P(H_{AZ}) + P(BV/H_{AM}) \cdot P(H_{AM})$$

$$P(\text{Hurna azul}): P(H_{AZ}) = 2/3$$

$$P(\text{Hurna amarela}): P(H_{AM}) = 1/3$$

$$P(BV/H_{AZ}) = 13/31$$

$$P(BV/H_{AM}) = 10/30$$

$$P(BV) = 13/31 \cdot 2/3 + 10/31 \cdot 1/3 = 12/31$$

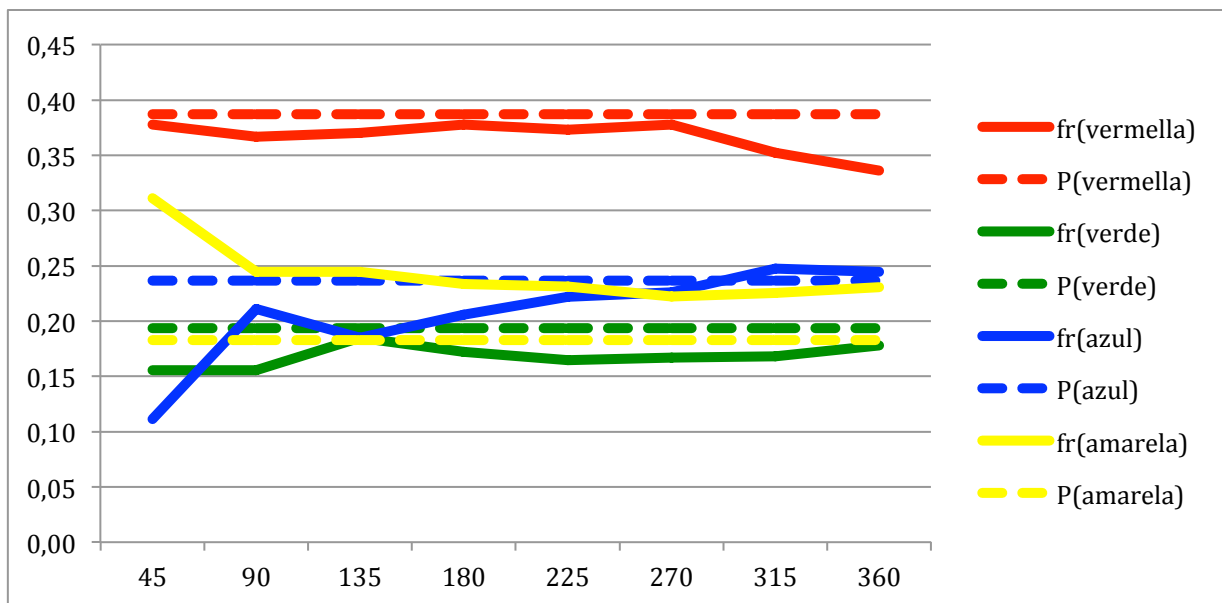
Analogamente calculamos as probabilidades para o resto das bolas que dan:

$$P(B_{\text{verde}}) = 6/31$$

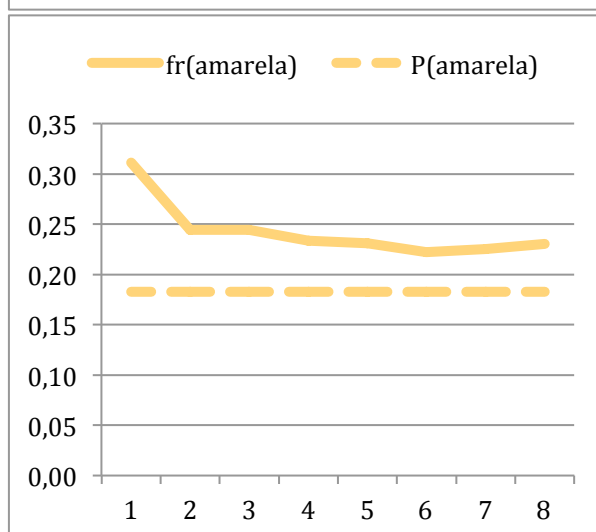
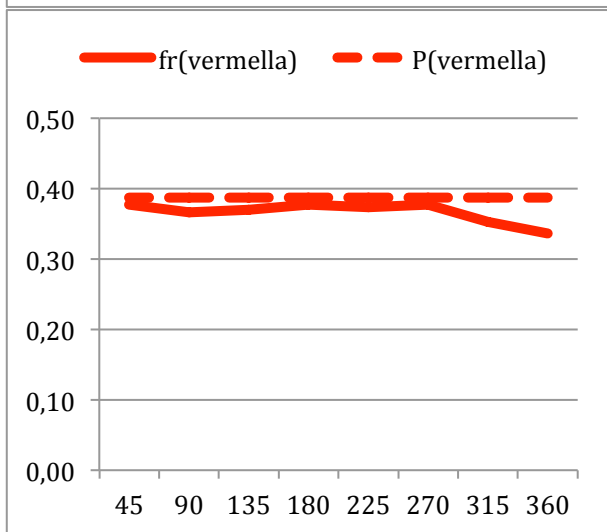
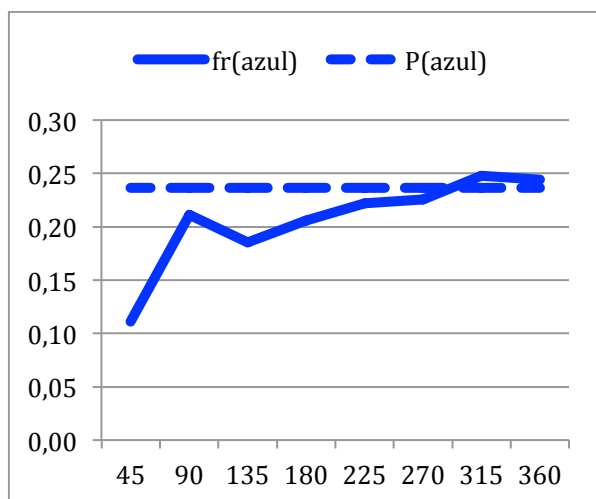
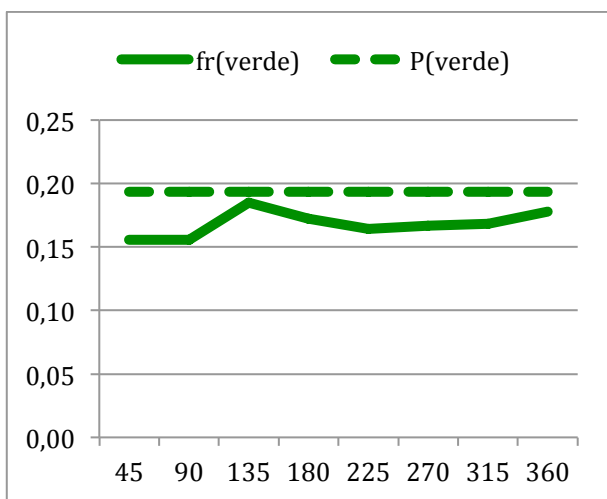
$$P(B_{\text{amarela}}) = 17/93$$

$$P(B_{\text{azul}}) = 22/93$$

Vexamos que conseguimos coas nosas probas despois de 360 extraccións:



Vémolas máis claramente por separado



O comportamento da verde e a azul indican que xa nos estamos aproximando ao resultado buscado, a vermella que se comportaba ben até as 300 extraccións máis ou menos agora parece que se alonxa e a amarela está bastante lonxe dos resultados desexables. De todas formas non podemos perder de vista que fixemos unicamente 360 extraccións.

Conclusións e posibles melloras do proxecto

Para concluir diremos que en canto a pregunta que nos faciamos sobre a resposta dos nosos compañeiros/amigos a nosa solicitude de colaboración podemos dicir que no caso de secundaria foi claro que acudían cando había regalo incrementándose a asistencia en máis de 15 alumnos de media diaria. En canto a constancia que queríamos observar na terceira fase do proxecto notouse sobre todo nos cursos baixos, nomeadamente no caso dun compañeiro que as veces era o único que acudía, que por outra banda nunca viñera antes desta recompensa, polo que podemos afirmar sin ningún tipo de dúbida que o que lle interesaba era a tarxeta.

En definitiva para os alumnos de secundaria:

-Amigos sí, pero a vaquiña polo que vale.

En canto aos de primaria non foi tan clara esta tendencia habendo incluso cursos que non acudiron o día do regalo tendo asistido na outra ocasión. Se ben é certo que sómentes fixemos o experimento dous días nos que puido ocorrer incluso que algún alumno quedara na biblioteca e non se enterase que estábamos a regalar gominolas.

En canto a parte experimental foi moi laboriosa tanto no momento de preparación, como de rexistro de datos e non digamos o estudo e análise dos datos. Pero a pesares destes inconvintes houbo momentos nos que realmente o pasamos moi ben.

Este proxecto poderíase mellorar se tivesemos máis tempo para realizar os experimentos por eso queremos propoñerlle aos que quedan no instituto que se queren seguir realizando os experimentos deixamoslles as nosas bases de datos para continuar sobre elas.

Recursos utilizados

Aplicacións informáticas:

- Folla de calculo Calc
- Procesador de textos
- Folla calculo Excel para gráficos.
- Epidat: taboas de continxencia.
- Google Drive: almacenamento de datos.