

## Estálisis con GeoGebra

## Cálculo de probabilidades nun problema xeométrico.

PROBABILIDADE DE QUE DOUS SEGMENTOS SE INTERSEQUEN.

### Obxectivos:

- Modelización dun problema de probabilidade xeométrica de solución en principio descoñecida, para estimar a probabilidade mediante a frecuencia observada en 100 probas.
- Obtención da media e desviación típica correspondentes ás frecuencias observadas en 10 series de 100 probas.
- Obtención da media e desviación típica de 10 das medias anteriores.

### Opcións xerais:

- Redondeo: 4 cifras decimais
- Idioma: Galician / Galego

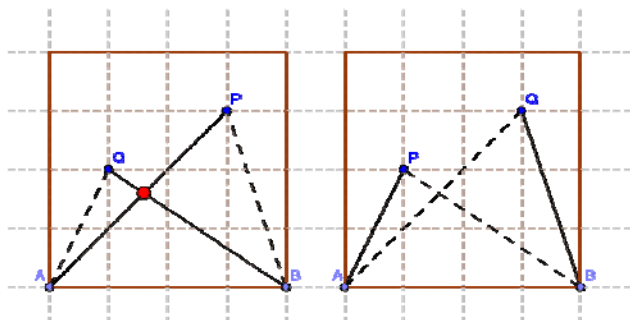
### Ferramentas e comandos:

	Mover		Intersecar dous obxectos
	Esvarador		Insire botón
ABC	Inserir texto		Inserir caixa de entrada
	Polígono regular	$\frac{\Sigma}{n}$	Media
	Achegar	Segunda Vista gráfica	
Liña de Entrada para redefinir obxectos		Liña de entrada para introducir comandos	
Liña de Entrada para inserir textos		Folla de cálculo	

### Propiedades dos obxectos:


- Visualizar valores.
- Modificar aspecto: cores, estilos ...

**Problema:** Nun cadrado selecciónanse ao azar dous puntos **P** e **Q**, unindo mediante segmentos **P** co **A** e **Q** con **B**, sendo **A** e **B** dous vértices fixos do cadrado, nos extremos dun mesmo lado. Cal é a probabilidade de que ambos os dous segmentos se intersequen? (*Prob\_Intersec\_Segmentos\_0.ggb*)




Imos trazar con GeoGebra  $n$  pares de tales segmentos, por exemplo 100, e ver con que frecuencia se intersecan. Isto suxeriranos a probabilidade de tal suceso e posiblemente facilítenos a súa demostración. Por outra parte, reiterando o experimento, poderemos apreciar como a desviación estándar das frecuencias obtidas diminúe de forma aproximada co inverso da raíz cadrada do tamaño da mostra.

**Preparación.** Activamos a **Vista gráfica 2 (Menú Vista)**, e arrastrándoa pola súa banda superior situámola na parte inferior da ventá de GeoGebra. Desprazamos a separación entre ambas as dúas vistas, ata deixar á **Vista gráfica 2** cunha altura dunhas 2 unidades. Na **Vista alxébrica**, facemos clic na primeira icona da súa barra superior, para que se mostren tamén nela os obxectos auxiliares.

Facemos clic na **Vista gráfica 1** e con a ferramenta **Achegar** , situando a lupa sobre a orixe, facemos zoom ata que o **1** do **Eixo Y** quede preto da parte superior. Facendo clic na **Vista gráfica 1**, podemos cambiarlle a cor de fondo a amarelo claro, e á **Vista gráfica 2** a verde claro. Nesta última, ocultamos os eixes e a cuadrícula.

### Construción

1. Coa ferramenta **Polígono Regular** , debuxamos un cadrado sinalando os puntos **(0, 0)** e **(1, 0)**, nese orde. Ocultamos os puntos **C** e **D**, facendo clic no pequeno círculo diante do seu nome na **Vista alxébrica** o facendo clic dereito neles. Ocultamos xa os eixos e a cuadrícula da **Vista gráfica 1**.

2. Introducimos na **Barra de Entrada**:  $n = 100$ . Este será en principio o número de pares de puntos que imos trazar, e así poderemos logo variarlo se nos interesa.

3. Escribimos na **Barra de Entrada** sucesivamente, pulsando [**Intro**] despois de cada unha, as liñas:

```
listaP = Secuencia[(random(), random()), k, 1, n]
listaQ = Secuencia[(random(), random()), k, 1, n]
```

Para introducir a segunda, despois de facer clic na **Barra de Entrada**, pulsamos a tecla da frecha arriba facemos clic na entrada anterior, cambiamos a P coa Q e pulsamos [**Intro**]. Cada unha destas instrucións crea unha lista de  $n$  puntos con coordenadas aleatorias en  $[0, 1)$ , distribuídos con probabilidade uniforme no cadrado. Ocultamos ambas as dúas listas.

4. Como antes, introducimos estas dúas liñas na **Barra de Entrada**:

```
listaSP = Secuencia[Segmento[A, Elemento[listaP, k]], k, 1, n]
```

$\text{listaSQ} = \text{Secuencia}[\text{Segmento}[\mathbf{B}, \text{Elemento}[\text{listaQ}, k]], k, 1, n]$

Cada unha destas liñas crea unha lista de  $n$  segmentos, unindo o punto  $\mathbf{A}$  con cada un dos puntos de  $\text{ListaP}$ , e o punto  $\mathbf{B}$  cos de  $\text{listaQ}$ . Se se recupera a primeira para introducir a segunda, deben substituírse á  $\mathbf{A}$  e as dúas  $\mathbf{P}$ , por  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{Q}$  respectivamente. Ocultamos tamén estas dúas listas, pois as presentaremos pouco a pouco.

5. Novamente na **Barra de Entrada**:

$\text{listaInt} = \text{Secuencia}[\text{Interseca}[\text{Elemento}[\text{listaSP}, k], \text{Elemento}[\text{listaSQ}, k]], k, 1, n]$

Esta nova lista conterá as  $n$  intersección, moitas delas indefinidas ( $?$ ,  $?$ ), entre os segmentos de ambas as dúas listas. Tamén ocultamos esta lista.

6. Seleccionamos a ferramenta **Inserir caixa de entrada**  $a=1$ , e facemos clic preto da esquina superior esquerda da **Vista Gráfica 2**. En **Subtítulo**, poñemos “**Nº de pares de segmentos:**”, e en **Obxecto vinculado**,  $n$ . Facendo clic dereito nela, na pestana **Estilo**, cambiamos a lonxitude a **4**. Esta caixa permitiranos cambiar comodamente o número de pares de segmentos a utilizar.

7. Coa ferramenta **Esvarador**  $a=2$ , facemos clic a dereita da **caixa de entrada** recién creada. Cambiamos o tipo a **Enteiro**, o **Mín.** a **0** e o **Máx.** a  $n$ . Si non o fose, cambiamos o **Nome** por  $i$ . Na pestana **Animación**, no despregable **Repetir** escollemos a opción  $\Rightarrow$  **Incrementando (unha vez)**.

8. Introducimos as seguintes liñas na **Barra de Entrada**:

$\mathbf{P} = \text{Elemento}[\text{listaP}, i]$

$\mathbf{Q} = \text{Elemento}[\text{listaQ}, i]$

$\mathbf{p} = \text{Elemento}[\text{listaSP}, i]$

$\mathbf{q} = \text{Elemento}[\text{listaSQ}, i]$

$\mathbf{I} = \text{Elemento}[\text{listaInt}, i]$

Creamos así os  $i$ -ésimos pares de puntos e segmentos, así como a intersección destes últimos, indefinida se non se cortan. Desprazando o esvarador  $i$ , veremos cada un deles, aínda que así non e moi doado percibir a frecuencia. *(Prob\_Intersec\_Segmentos\_1.ggb)*

9. Introducimos as seguintes liñas na **Barra de Entrada**:

$\text{listaSPv} = \text{Primeiro}[\text{listaSP}, i]$

$\text{listaSQv} = \text{Primeiro}[\text{listaSQ}, i]$

$\text{listaIntv} = \text{Primeiro}[\text{listaInt}, i]$

Vemos así todos os segmentos creados e as súas interseccións. Facendo clic dereito nestas listas na **Vista alxébrica**, modificamos o **grosor**, **estilo** y **cor** destas listas de liñas e puntos, para non sobrecargar a imaxe.

10. Introducimos na **Barra de Entrada**:

**k = Lonxitude[EliminaIndefinidos[Primeiro[listaInt, i]]]**

**fr = Lonxitude[EliminaIndefinidos[listaInt]]/n**

A primeira almacena en **k** o número de puntos de intersección visibles, que varían ao mover o esvarador **i**, e a segunda a frecuencia nos **n** pares de segmentos trazados.

11. Na **Vista Gráfica 2**, coa ferramenta **Inserir Texto** <sup>ABC</sup>, debaixo da **caixa de entrada** para **n**, creamos o texto:

**Nº de puntos:**

A **k** seleccionámola do menú despregable **Obxectos**.

12. A continuación do anterior, poñemos este outro:

**Frecuencia:**

Agora o texto dentro da caixa escribímolo seleccionando (**caixa baleira**) no despregable **Obxectos**, e escribindo dentro dela. Ambos os dous datos están referidos ao número de puntos visibles, dependente da posición do esvarador **i**.

13. Coa ferramenta **Insire Botón** , creamos un botón á dereita do esvarador **i**. En **Subtítulo**, poñemos “**Inicia animación**”, e na ventá **Guión (Script) GeoGebra**: as liñas:

**i=0**

**IniciaAnimación[i]**

Así (re)iniciase a animación, presentando un a un o mesmo conxunto de pares de segmentos, co que as frecuencias finais serán sempre as mesmas.


14. Para renovar o conxunto de segmentos obtido ao azar, creamos outro botón , que podemos situar debaixo e algo a esquerda do anterior. En **Subtítulo** poñemos “**Nova serie de segmentos**”, e no guión só a instrución **ActualizaConstrución[]**. Cada vez que o pulsamos, áchanse **n** novos pares de segmentos aleatorios, co que cambiará a frecuencia, pero oscilando sempre preto de 0.25. (*Prob\_Intersec\_Segmentos\_2.ggb*)

15. Para estudar como se distribúen estas frecuencias, abrimos a **Folla de Cálculo**, no menú **Vista**. Se é necesario, colocámola á dereita e axustamos o seu ancho para que queden visibles as tres primeiras columnas. Se non o esta, pulsamos no pequeno triángulo á esquerda da súa barra de título para facer visible a barra de ferramentas, e nesta na primeira icona  $f_x$ , para expoñer a súa barra de entrada. Escribimos os seguintes textos nas celas que se indican:

**A1:**      **Últimas 10**  
**A2:**      **frecuencias**  
**A12:**     **Media**  
**A13:**     **Desv. típica**

16. Facemos clic dereito no número **fr** na **Vista alxébrica**. No menú contextual, eliximos **Rexistrar na folla de cálculo**. Marcamos a caixa **Límite de fila** e deixamos o valor en **10**, desmarcamos a caixa **Amosar rótulo** e pechamos. Agora cada vez que cambie o valor de **fr**, rexistrárase na folla de cálculo. Cando pasen de **10** valores, os máis antigos eliminaranse. Pulsamos máis de **10** veces o botón **Nova serie de segmentos** para comprobalo.

17. Facemos clic na cela B12 e a continuación escollemos a ferramenta **Media**  $\frac{\Sigma}{n}$ , segunda na última caixa da barra de ferramentas da folla de cálculo. Facemos clic na cela **B1** e arrastramos para abarcar ata a cela **B10**, soltando logo. Vemos que na liña de entrada da folla de cálculo aparece **Media[B1:B10]**. Para a desviación típica no temos ferramenta, así que introducimos o comando **DT[B1:B10]** na cada **B13**.

18. Temos así a media e a desviación típica das frecuencias das interseccións nas últimas dez series de segmentos. Vamos agora a ver como é a media de 10 destas medias e a súa desviación típica. Para elo, empezamos creando un botón  que nos permita renovar cun só clic as dez medias anteriores. Colocámolo ao lado do último creado, en **Subtítulo** poñemos **10 novas series de segm.**, e na ventá **Guión** a instrución:

**Secuencia[ActualizaConstrución[, k, 1, 10]**

Unha pulsación deste botón equivale a pulsar dez veces o anterior, de maneira que se renovan as dez frecuencias anotadas previamente, así como a súa media e desviación típica. (*Prob\_Intersec\_Segmentos\_3.ggb*)

19. Anotamos nas celas **C1:C10** **10** valores da cela **B12**, obtidos despois de pulsar o botón **10 nuevas series de segm**. A continuación, seleccionamos as celas **B12:B13** e arrastramos polo pequeno cadrado negro da parte inferior dereita para copialas debidamente modificadas as celas **C12:C13**. A media en **C12** seguirá sendo próxima a 0.25, pero a desviación típica en **C13** será sensiblemente menor que a obtida en **B13**, en media  $\sqrt{10}$  veces menor.

(*Prob\_Intersec\_Segmentos\_4.ggb*)