

Teoría estadística de la transmisión de apellidos: los procesos de ramificación de Galton-Watson

Jose Ameijeiras Alonso¹

¹Máster en Técnicas Estadísticas

RESUMEN

Los sistemas que se reproducen de generación en generación a través de una distribución fija, pueden modelarse a través de los procesos de ramificación de Galton-Watson. Un ejemplo de tales sistemas es la transmisión de apellidos de padres a hijos varones. Con la teoría de procesos de ramificación podremos modelar la evolución de este sistema, calculando la probabilidad de extinción de un cierto apellido.

Palabras e frases chave: Procesos de ramificación; herencia de apellidos.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de los procesos de ramificación es la parte de la estadística que se encarga de ver el crecimiento y la extinción de sistemas cuyos individuos se reproducen siguiendo ciertas leyes estocásticas. González, M. y del Puerto, I.M. (2010) y Harris, T.E. (1989) muestran distintos escenarios para estudiar como crecen y se extinguen dichos sistemas en función de la distribución que regula la descendencia de los individuos.

Los procesos de ramificación de Galton-Watson, sirven para modelar sistemas que se reproducen de generación en generación a través de una distribución fija. Estos procesos bajo unas suposiciones bastante generales nos permiten estudiar la probabilidad de extinción del sistema.

Un ejemplo de los procesos de ramificación de Galton-Watson es la transmisión de apellidos de padres a hijos varones. Con esta teoría podremos modelar la evolución de este sistema, calculando la probabilidad de extinción de un cierto apellido.

2. PROCESOS DE RAMIFICACIÓN DE GALTON-WATSON

Sea $\{X_{nj} : n \in \{0, 1, \dots\}, j \in \{0, 1, \dots\}\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, tomando valores enteros $k \geq 0$ con masa de probabilidad $\mathbb{P}(X_{nj} = k) = p_k$. Se definen como procesos de ramificación de Galton-Watson a los procesos estocásticos $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ verificando las siguientes condiciones:

- $Z_0 = N \in \mathbb{Z}^+$
- $Z_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{Z_n} X_{nj} & \text{si } Z_n > 0, \\ 0 & \text{si } Z_n = 0. \end{cases}$

Harris, T.E. (1989) demuestra que para poder elaborar la teoría de los procesos de ramificación será necesario asumir las siguientes suposiciones:

- Se asumirá que $Z_0 = 1$. Esto no supone ninguna restricción, pues si tenemos que $Z_0 = N$, con $N \in \{2, 3, \dots\}$ esto no es más que la suma de N procesos de ramificación independientes todos empezando con un individuo.
- Se tomará $p_k < 1, \forall k \in \{0, 1, \dots\}$ y $p_0 + p_1 < 1$.

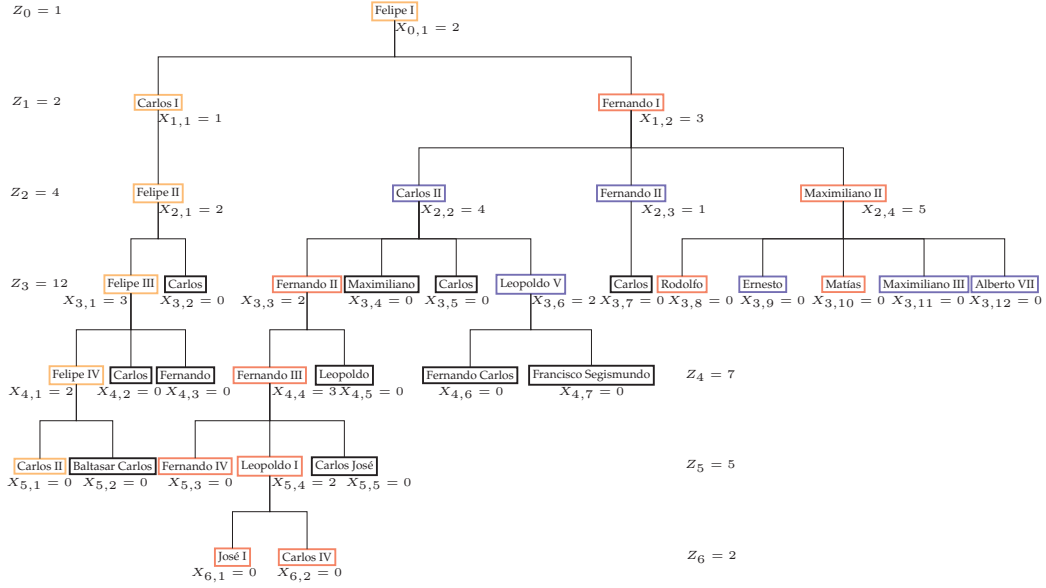


Figura 1: Descendencia masculina que alcanzó la mayoría de edad en la dinastía Habsburgo desde el rey Felipe I de España.

- El valor esperado de la masa de probabilidad p_k debe ser finito, $m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k < \infty$.

Un ejemplo de proceso de ramificación de Galton-Watson sería la descendencia masculina que alcanzó la mayoría de edad en la dinastía Habsburgo desde el rey Felipe I de España que mostramos en la Figura 1.

El valor de Z_n representará al número de varones que alcanzaron la mayoría de edad en la generación n -ésima, mientras que el valor de $X_{n,j}$ representará al número de descendientes producidos por el individuo j en la generación n -ésima. Si se conoce la probabilidad de que cada individuo tenga k hijos varones que alcancen la mayoría de edad, es decir, conociendo $p_k = \mathbb{P}(X_{n,j} = k)$, con $k \geq 0$, nos podemos preguntar: ¿cuál es la probabilidad de que el apellido de los Habsburgo desapareciese?

3. PROBABILIDAD DE EXTINCIÓN EN LOS PROCESOS DE RAMIFICACIÓN DE GALTON-WATSON

Denotando como $q = \mathbb{P}(Z_n \rightarrow 0)$, González, M. y del Puerto, I.M. muestran que solo pueden ocurrir dos cosas, que el proceso de ramificación se extinga o que se vaya a infinito, esto es, $q + \mathbb{P}(Z_n \rightarrow \infty) = 1$. El valor de m será determinante para obtener la expresión de q . Así, en función del valor de m , González, M. y del Puerto, I.M. demuestran que existen tres tipos de procesos:

- Procesos subcríticos:** Este tipo de procesos se dan cuando $m < 1$ y en este caso, se tiene que $q = 1$.
- Procesos críticos:** Este tipo de procesos se dan cuando $m = 1$ y en este caso, se tiene que $q = 1$.
- Procesos supercríticos:** Son los únicos donde la extinción no es segura y se dan cuando $m > 1$. En este caso, se tiene que q coincidirá con la única solución no negativa y menor que 1 que verifique la expresión $s = f(s)$, donde $f(s)$ se define del siguiente modo:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \text{ con } |s| \leq 1.$$

Así, se puede analizar cuál es la probabilidad de que nuestro apellido se acabe extinguiendo. Para ello, supongamos que, tal y como ocurre habitualmente, los hijos heredan los apellidos de sus progenitores paternos. Denotemos por X_{nj} al número de descendientes varones del individuo j -ésimo en la generación n -ésima. Estas variables siguen una distribución geométrica, por lo que la masa de probabilidad viene dada por $p_k = (1 - \lambda)^k \lambda$, para $k \geq 0$. Además, dado que el valor medio de estas variables es $m = (1 - \lambda)\lambda^{-1}$, en función de λ , el proceso se puede clasificar como:

- **Subcrítico:** Si $\lambda > 1/2$, en este caso, la extinción del apellido ocurre con probabilidad 1.
- **Crítico:** Si $\lambda = 1/2$, en este caso, la extinción del apellido también ocurre con probabilidad 1.
- **Supercrítico:** Si $\lambda < 1/2$, en este caso, la extinción del apellido ocurre con probabilidad s , donde s será la única solución no negativa y menor que uno de la ecuación $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda)^k \lambda s^k = s$.

A la vista de los datos consultados en el Instituto Nacional de Estadística (2013) para Galicia en el año 2011, se puede asumir que las variables aleatorias X_{nj} siguen una distribución geométrica de parámetro $\lambda = 0.642$. Por tanto, suponiendo que este parámetro se mantiene constante a lo largo del tiempo, la probabilidad de que el apellido de un individuo nacido en Galicia se extinga será uno.

4. CONCLUSIONES

Usando la teoría de los procesos de ramificación de Galton-Watson, la cual sirve para modelar sistemas que se reproducen de generación en generación a través de una distribución fija, se ha podido estudiar la transmisión de apellidos de padres a hijos varones en Galicia. Analizando este sistema, se puede llegar a la conclusión de que la probabilidad de que el apellido de un individuo nacido en Galicia se acabe extinguiendo es uno.

REFERENCIAS

- González, M. y del Puerto, I.M. (2010). Branching process: Genealogy and Evolution. *Boletín de Estadística e Investigación operativa*, **2**, 109-113.
- Harris, T.E. (1989). *The theory of branching processes*. Dover publications. New York.
- Instituto Nacional de Estadística (2013). *Instituto Nacional de Estadística* [sitio web]. Madrid: INE. [Consulta: 08 julio 2013]. Disponible en: <http://www.ine.es/>