

MONITORIZACIÓN DEL CONTENIDO DE PARTÍCULAS EN COMBUSTIBLE DE AVIACIÓN

Ricardo Cao¹, Salvador Naya¹, Mario Francisco Fernández¹ y Javier Tarrío¹

¹Departamento de Matemáticas. Universidade da Coruña.

RESUMEN

En este trabajo se presenta una aproximación estadística al problema de estimación de impurezas en el combustible utilizado en aviación. El objetivo es estimar el número de partículas contenidas en dicho combustible y su tamaño, estas partículas necesitan ser filtradas previamente para su empleo en los motores de aviación. La estimación de los parámetros de estas variables se llevará a cabo utilizando el método de máxima verosimilitud. Como las observaciones muestrales son obtenidas de manera incompleta, ya que sólo se conoce que el número de partículas entre ciertos tamaños se encuentra en unos intervalos determinados, será necesario utilizar versiones de las funciones de máxima verosimilitud diseñadas específicamente para este tipo de datos.

Palabras y frases clave: Norma API/IP 1581, Datos incompletos, Máxima verosimilitud.

1. INTRODUCCIÓN

Las partículas existentes en el combustible de aviación, pequeñas partículas sólidas y agua, son un problema que preocupa a los fabricantes de filtros para combustibles, como es la empresa líder en este sector, FACET IBÉRICA, que ha sido quien nos propuso este tema y con la que hemos establecido una interesante colaboración.

El nivel de contaminación de partículas de un fluido puede ser medido por varios métodos. En cualquier caso, estos métodos no resuelven un problema clave como es el de cuantificar el tamaño y el número de partículas en el queroseno. La necesidad de cuantificar el tamaño y número de partículas contenidas en el queroseno, así como tratar de relacionar esos valores con ppm o mg/L, surge de la necesidad real de comprobar que el combustible introducido en el avión cumple con lo estipulado en las especificaciones, es decir, con los valores límites fijados por American Petroleum Institute y Energy Institute, y asumidos mundialmente por todos los operadores.

La normativa existente sobre el filtrado de combustible de aviación que se aplicaría en este estudio es la API/IP 1581. Ambas normas regulan la calidad del combustible

de aviación y fijan los valores límite de contaminación en el efluente en 0,26 mg/L para sólidos y en 15 ppm para agua libre.

Asimismo será de aplicación la norma API/IP 1598, la cual indica las consideraciones a tener en cuenta en los medidores de partículas empleados para combustible de aviación. Es esta norma la que relaciona el contenido en partículas (tanto sólidas como agua) con los números ISO. El problema es determinar cuántos miligramos por litro (mg/l) corresponden a un determinado número ISO. La Figura 1 muestra la relación entre el contenido de partículas con el correspondiente número ISO.

ISO Code	Number of particles per 100 ml	
	more than	up to
22	2.000.000	4.000.000
21	1.000.000	2.000.000
20	500.000	1.000.000
19	250.000	500.000
18	130.000	250.000
17	64.000	130.000
16	32.000	64.000
15	16.000	32.000
14	8.000	16.000
13	4.000	8.000
12	2.000	4.000
11	1.000	2.000
10	500	1.000
9	250	500
8	130	250

↓

ISO Code 21/18/15: 21 → $\geq 4 \mu\text{m}_{(c)}$	18 → $\geq 6 \mu\text{m}_{(c)}$	15 → $\geq 14 \mu\text{m}_{(c)}$
--	---------------------------------	----------------------------------

Figure 1: Detalle de la norma que relaciona el contenido de partículas con el correspondiente número ISO

En este trabajo se presenta una aproximación al problema de estimación del contenido de impurezas en el combustible. En las dos secciones siguiente se presenta una propuesta del modelo teórico, mientras que en la sección cuarta se analizará una determinada muestra con objeto de estimar su distribución, tanto de la variable número de partículas, como de la variable tamaño de dichas partículas.

2. PROPUESTA DEL MODELO

Desde el punto de vista estadístico se trataría de modelizar la variable aleatoria de tipo discreto:

$$N = \text{“número de partículas en la muestra.”}$$

Un primer problema que surge al considerar esta variable es que el número de partículas no es observable directamente, si bien se puede conocer el número de éstas que están dentro de una serie de intervalos. Por otra parte, el tamaño de estas partículas sería otra variable aleatoria de la que interesa conocer su distribución de probabilidad o, equivalentemente, la probabilidad de que una partícula elegida al azar de la muestra tenga tamaño mayor que un determinado valor x_0 , es decir, $R(x_0) = P(X \geq x_0)$,

Suponiendo que la distribución del número de partículas de la muestra, N , siga una distribución discreta con masa de probabilidad:

$$p_n = P(N = n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

dado que el número de partículas es un valor muy grande, es posible modelizar esta variable mediante una distribución continua Y , con función de densidad g y función de distribución G , dada por:

$$G(y) = P(N \leq y), \quad y \in [0, \infty)$$

Bajo estos supuestos, dado un valor de tamaño de partículas $N = n$, se trataría de disponer de una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ de la variable condicionada $X | N = n$.

En la práctica, no es posible la observación directa de N ni de la muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$, teniendo simplemente la posibilidad de observar intervalos de la forma $[a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, k$, con $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ a los cuales pertenecen las variables aleatorias,

$$\xi_r = \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \geq b_r\}}, \text{ y}$$

$$\xi_j = \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \geq b_j\}} - \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \geq b_{j+1}\}} = \sum_{i=1}^N 1_{\{b_j \leq X_i < b_{j+1}\}}, \quad j = 1, 2, \dots, r-1,$$

donde $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_r$, siendo r el número de filtros distintos por los que deben de pasar las partículas y $1_{\{\cdot\}}$ la función indicadora.

Por tanto, matemáticamente podríamos definir las siguientes variables aleatorias:

$$\eta_j = \sum_{i=1}^k i 1_{\{a_i < \xi_j \leq a_{i+1}\}}, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

de forma que $\eta_j = i_0 \Leftrightarrow \xi_j \in (a_{i_0}, a_{i_0+1}]$.

Por otra parte, en principio, se podría suponer que la distribución del número de partículas, N , se pudiera aproximar mediante una distribución normal, $N \stackrel{d}{\simeq} N(\mu, \sigma)$, y también parece razonable partir del supuesto que la distribución condicionada de X/N pueda ajustarse mediante una distribución exponencial.

3. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

Bajo las hipótesis de la sección anterior, el problema estadístico consistirá en la estimación adecuada de los parámetros de las distribuciones supuestas y su posterior diagnosis.

Para esta estimación se utilizará el método de máxima verosimilitud que es el que proporciona estimadores con mejores propiedades estadísticas (más eficientes). Para esta estimación supondremos que se puede observar los valores ξ_j (aunque en realidad sólo serían observables los correspondientes η_j). También se supondrá que se tiene un valor fijo del número de partículas en el combustible N (en la práctica este valor será el que debemos estimar y por tanto es desconocido). La función de verosimilitud estará dada por la expresión:

$$L(\lambda/N) = \left[\prod_{j=1}^{r-1} (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1}))^{\xi_j} \right] S_\lambda(b_r)^{\xi_r}, \quad (1)$$

donde se está suponiendo distribución exponencial con función de supervivencia o fiabilidad $S_\lambda(x) = \exp(-\lambda x)$.

Con objeto de estimar los parámetros por el método de máxima verosimilitud se tendrá que maximizar en función de λ la expresión (1), para lo que resultará conveniente construir su correspondiente función soporte, es decir, el logaritmo de la función de verosimilitud (denotada por $l = \log L$) que tendrá el mismo máximo que la función L :

$$l(\lambda/N) = \sum_{j=1}^{r-1} \xi_j \log (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})) + \xi_r \log (S_\lambda(b_r)).$$

Esta función de log-verosimilitud está condicionada al valor “observado” para N . En realidad no podremos observar ese valor de N y tan sólo se tendrá una cota inferior para él, dada por:

$$\sum_{j=1}^r \xi_j = \sum_{i=1}^N 1_{\{X_i \in [b_1, \infty)\}} \leq N$$

De hecho, ni siquiera se puede observar dicha cota inferior, ya que los ξ_j no son observables de forma exacta, sino tan solo agrupadamente en los intervalos $[a_1, a_2)$, $[a_2, a_3)$, $\dots$, $[a_{k-1}, a_k)$.

Así, la versión (conjunta) incondicional de la función de verosimilitud será:

$$L(\lambda, \mu, \sigma) = g_{\mu, \sigma}(N) \left[\prod_{j=1}^{r-1} (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1}))^{\xi_j} \right] S_\lambda(b_r)^{\xi_r},$$

ya que estamos supuniendo que $X_i/N=n \stackrel{d}{=} X_i$.

Para la estimación de los parámetros con esta última expresión de la verosimilitud supondremos que se parte de una “muestra” con m observaciones del tipo:

$$\begin{aligned} & \left(N_1, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \dots, X_{N_1}^{(1)} \right) \\ & \left(N_2, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_{N_2}^{(2)} \right) \\ & \vdots \\ & \left(N_m, X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \dots, X_{N_m}^{(m)} \right). \end{aligned}$$

La función de verosimilitud para esta nueva muestra resultará ser:

$$L(\lambda, \mu, \sigma) = \prod_{l=1}^m \left\{ g_{\mu, \sigma}(N_l) \left[\prod_{j=1}^{r-1} (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1}))^{\xi_j^{(l)}} \right] S_\lambda(b_r)^{\xi_r^{(l)}} \right\},$$

donde $\xi_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{N_l} 1_{\{b_j \leq X_i^{(l)} < b_{j+1}\}}$.

Al igual que en el caso anterior, se podrá considerar la función soporte ($l = \log L$) que habría que maximizar:

$$l(\lambda, \mu, \sigma) = \sum_{l=1}^m \left\{ \log g_{\mu, \sigma}(N_l) + \sum_{j=1}^{r-1} \xi_j^{(l)} \log (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})) + \xi_r^{(l)} \log S_\lambda(b_r) \right\}. \quad (2)$$

El problema sigue siendo el no poder observar las variables aleatorias N_l ni tampoco las $\xi_j^{(l)}$.

Como propuesta, como N_l no son observables, podrían sustituirlas en la expresión de la función de la log-verosimilitud (2) por:

$$\tilde{N}_l(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^r \xi_j^{(l)}}{S_\lambda(b_1)}.$$

Con lo que la función log-verosimilitud estimada quedaría:

$$\tilde{l}(\lambda, \mu, \sigma) = \sum_{l=1}^m \left\{ \log g_{\mu, \sigma}(\tilde{N}_l) + \sum_{j=1}^{r-1} \xi_j^{(l)} \log (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})) + \xi_r^{(l)} \log S_\lambda(b_r) \right\}.$$

Como los $\xi_j^{(l)}$ tampoco son observables, podríamos sustituirlos por:

$$\tilde{\xi}_j^{(l)} = \frac{a_{\eta_j} + a_{\eta_{j+1}}}{2},$$

para utilizarlos en $\tilde{N}_l(\lambda)$ dando lugar a:

$$\tilde{\tilde{N}}_l(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^r \tilde{\xi}_j^{(l)}}{S_\lambda(b_1)}.$$

Consecuentemente, se tendría la siguiente expresión para la función soporte:

$$\tilde{\tilde{l}}(\lambda, \mu, \sigma) = \sum_{l=1}^m \left\{ \log g_{\mu, \sigma}(\tilde{\tilde{N}}_l) + \sum_{j=1}^{r-1} \tilde{\xi}_j^{(l)} \log (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})) + \tilde{\xi}_r^{(l)} \log S_\lambda(b_r) \right\}.$$

Otra alternativa para la “estimación” de $\xi_j^{(l)}$ sería tener en cuenta que

$$\xi_j^{(l)} = \sum_{i=1}^{N_l} 1_{\{b_j \leq X_i^{(l)} < b_{j+1}\}},$$

por tanto,

$$\xi_j^{(l)} / N_l \stackrel{d}{=} \text{Bi}(N_l, (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})))$$

y utilizando la aproximación de la binomial por la normal,

$$\xi_j^{(l)} / N_l \stackrel{d}{=} N\left(N_l (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})), \sqrt{N_l (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})) (1 - (S_\lambda(b_j) - S_\lambda(b_{j+1})))}\right)$$

4. ESTIMACIÓN MEDIANTE UNA MUESTRA

Utilizando datos reales del filtrado de combustible, se ajustaron dos tipos de distribuciones: la lognormal para estimar el número de partículas y la exponencial para el tamaño de dichas partículas. Se probaron como influyen dos métodos para estimar el parámetro de la exponencial: el de máxima-verosimilitud y el de mínimos cuadrados. Se ejecutaron distintas estimaciones del parámetro de la exponencial sobre varias muestras de frecuencias empleando el programa Solver de la hoja Excel y también mediante el software libre R. A partir de estas estimaciones es posible, usando las correspondientes transformaciones de la variable de interés estimar los mg/l de partículas que hay en una muestra de combustible. Para esto se utilizará la hipótesis de que su forma es esférica, con lo que una vez estimado el número de partículas bastará con multiplicarlo por el volumen medio de una partícula y su densidad correspondiente.

5. CONCLUSIONES

Se ha propuesto un método para estimar el contenido de impurezas en el combustible de aviación. Para ello se utilizó el método de máxima verosimilitud y la aproximación de una distribución binomial a normal. Esperamos que este tipo de estudios sean de utilidad para comprender la norma ISO entre los interesados en el control de calidad del combustible.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia MTM2008-00166. Los autores quieren expresar su especial agradecimiento a la empresa FACET IBÉRICA y especialmente a Cándido Cancelo y Helena Brage.

REFERENCIAS

Cao Abad, R., Francisco Fernández, M., Naya Fernández, S., Presedo Quindimil, M. P., Vázquez Brage, M., Vilar Fernández, J. A. y Vilar Fernández, J. M. (2001). Introducción a la Estadística y sus Aplicaciones. Ediciones Pirámide.
API/IP 1581. Specifications and Qualification Procedures for Aviation Jet Fuel Filter/Separators.