

EL VALOR DE SHAPLEY DE UN JUEGO MODIFICADO EN ENTORNOS DE ESTRUCTURA COALICIONAL

J. M. Alonso Meijide¹, B. V. Casas Méndez¹, A. M. González Rueda² y S. M.
Lorenzo Freire³

¹Departamento de Estadística e I. O. Universidad de Santiago de Compostela.

²Departamento de M. Aplicada y Estadística. Universidad Politécnica de Madrid.

³Departamento de Matemáticas. Universidad de Coruña.

RESUMEN

En este trabajo se introduce un valor para juegos cooperativos con utilidad transferible y estructura coalicional. Este valor se puede interpretar como el valor de Shapley de un cierto juego modificado asociado al inicial o como un valor de Shapley modificado del juego inicial. Se proporciona una caracterización axiomática por medio de cinco propiedades lógicamente independientes. Finalmente, se proporciona una herramienta de cálculo que hace uso de la denominada extensión multilineal.

Palabras y frases clave: Juegos TU, estructura coalicional, valor de Shapley, interpretaciones, caracterización axiomática, extensión multilineal.

1. INTRODUCCIÓN

Un valor determina los pagos asignados a cada jugador en un juego cooperativo. Dos de los valores más importantes son el valor de Shapley (Shapley, 1953) y el valor de Banzhaf (Banzhaf, 1965). Cuando tenemos información disponible acerca de las relaciones de afinidad entre los jugadores, los valores coalicionales son una herramienta más apropiada para asignar estos pagos. Estas relaciones entre los jugadores se modelan mediante un conjunto de uniones a priori, i.e., una partición del conjunto de jugadores. Dos de estos valores coalicionales fueron propuestos por Owen; el valor coalicional de Owen (Owen, 1977) y el valor coalicional de Banzhaf-Owen (Owen, 1982). Alonso-Meijide et al. (2007) presentaron un trabajo en el que comparaban estos valores coalicionales. El valor coalicional de Owen divide entre los jugadores el valor de Shapley del llamado juego cociente mientras que el valor de Banzhaf-Owen asigna a cada jugador el valor de Banzhaf de un cierto juego modificado. En este trabajo, proponemos un nuevo valor coalicional, Γ , que asigna a cada jugador el valor de Shapley del mismo juego modificado. Se puede establecer un fuerte paralelismo entre el nuevo valor y el valor de Banzhaf-Owen.

2. PRELIMINARES

Definición Un *juego cooperativo TU* (con utilidad transferible) es un par (N, v) donde $N = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de jugadores y $v : 2^N \rightarrow \mathcal{R}$ es una función que verifica que $v(\emptyset) = 0$.

v se denomina función característica del juego. Dada una coalición $S \subset N$, $v(S)$ representa el pago que se pueden asegurar los jugadores de S . Denotaremos por $G(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con conjunto de jugadores N .

Sea $(N, v) \in G(N)$ un juego TU. Los jugadores $i, j \in N$ se dice que son *jugadores simétricos* si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para todo $S \subset N \setminus \{i, j\}$.

Por un valor en $G(N)$ entendemos una función f que asigna un vector $f(N, v) \in \mathcal{R}^n$ para cada juego $(N, v) \in G(N)$, donde $f_i(N, v)$ es el pago del jugador $i \in N$.

Definición (Shapley (1953).) El *valor de Shapley*, φ , asigna para cada juego $(N, v) \in G(N)$ y cada jugador $i \in N$ el valor:

$$\varphi_i(N, v) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)], \text{ donde } s = |S|.$$

Definición (Banzhaf (1965).) El *valor de Banzhaf*, β , asigna para cada juego $(N, v) \in G(N)$ y cada jugador $i \in N$ el valor:

$$\beta_i(N, v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Definición (Owen (1972).) Sea (N, v) un juego cooperativo de n jugadores. La *extensión multilinear* (EML) de v es la función real de n variables

$$f(q_1, \dots, q_n) = \sum_{S \subset N} \prod_{j \in S} q_j \prod_{j \notin S} (1 - q_j) v(S).$$

La EML admite una interpretación probabilística. Si X es una coalición de jugadores formada de manera aleatoria, suponiendo que q_j es la probabilidad de que el jugador j pertenezca a X para $j = 1, \dots, n$ y que estas probabilidades son independientes, entonces para cada $S \subset N$ se tiene:

$$\text{prob}\{X = S\} = \prod_{j \in S} q_j \prod_{j \notin S} (1 - q_j).$$

Por tanto $f(q_1, \dots, q_n) = E[v(X)]$, donde E representa la esperanza matemática. Las EMLs son particularmente útiles para el cálculo de algunos de los valores en el contexto de juegos TU.

Consideremos un conjunto finito de jugadores $N = \{1, \dots, n\}$. Denotaremos el conjunto de todas las particiones de N por $P(N)$.

Definición Un sistema de uniones a priori o estructura de coaliciones $P = \{P_1, \dots, P_m\}$ sobre N es una partición de N ($P \in P(N)$), esto es, $\bigcup_{k=1}^m P_k = N$ y $P_k \cap P_h = \emptyset$ cuando $k \neq h$.

Una estructura de coaliciones trivial es $P^n = \{\{1\}, \dots, \{n\}\}$, en la que cada jugador constituye una unión.

Dado $i \in N$, $P(i)$ denota la familia de las estructuras de coaliciones sobre N donde $\{i\}$ es una unión individual, es decir, si $P \in P(i)$ entonces $\{i\} \in P$.

Para cada $i \in P_k \in P$, P_{-i} denota la partición de $P(i)$ obtenida de P cuando el jugador i abandona su unión P_k y se aísla, i.e.,

$$P_{-i} = \{P_h \in P : h \neq k\} \cup \{P_k \setminus \{i\}, \{i\}\}.$$

Definición Un juego TU con una estructura de coaliciones es una terna (N, v, P) donde $(N, v) \in G(N)$ y P es una estructura de coaliciones sobre N .

Denotaremos por $G^{cs}(N)$ el conjunto de todos los juegos TU con una estructura de coaliciones en los que el conjunto de jugadores es N .

Si $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$, el juego cociente asociado $(M, v^P) \in G(M)$ es el definido por $v^P(R) = v(\bigcup_{k \in R} P_k)$, para todo $R \subset M$.

Por un valor en $G^{cs}(N)$ entendemos una función g que asigna un vector $g(N, v, P) \in \mathcal{R}^n$ para cada juego con uniones a priori $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$, donde $g_i(N, v, P)$ es el pago del jugador $i \in N$.

Dado un valor f en $G(N)$, un valor coalicional g en $G^{cs}(N)$ se dice que es un f -valor coalicional cuando $g(N, v, P^n) = f(N, v)$, para todo $(N, v) \in G(N)$.

Definición (Owen (1977).) El valor de Owen, ϕ , es el valor de $G^{cs}(N)$ definido como

$$\phi_i(N, v, P) = \sum_{R \subset M \setminus \{k\}} \sum_{T \subset P_k \setminus \{i\}} \frac{t!(p_k - t - 1)!r!(m - r - 1)!}{p_k!m!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)]$$

para todo $i \in N$ y $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$, donde $P_k \in P$ es la unión tal que $i \in P_k$, $m = |M|$, $p_k = |P_k|$ y $Q = \bigcup_{h \in R} P_h$.

3. EL VALOR Γ Y SUS INTERPRETACIONES

Definición (Owen (1982).) El valor de Banzhaf-Owen, ψ , es el valor de $G^{cs}(N)$ definido como

$$\psi_i(N, v, P) = \sum_{R \subset M \setminus \{k\}} \sum_{T \subset P_k \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{m-1}} \frac{1}{2^{p_k-1}} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)]$$

para todo $i \in N$ y $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$. En Alonso-Meijide et al. (2007) se mostró que este valor coalicional era un valor coalicional de Banzhaf. Además, es sencillo demostrar que, dado $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$ y un jugador $i \in P_k \in P$, el valor coalicional de Banzhaf-Owen del jugador i puede interpretarse como el valor de Banzhaf de este

jugador aplicado al juego TU jugado por todas aquellas uniones distintas de P_k y los jugadores de la unión P_k .

Proposición (Laruelle y Valenciano (2004).) Para todo $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$ y todo jugador $i \in P_k$, $P_k \in P$,

$$\Psi_i(N, v, P) = \beta_i \left(M \setminus \{k\} \cup P_k, v^{M \setminus \{k\} \cup P_k} \right), \text{ donde}$$

$$v^{M \setminus \{k\} \cup P_k}(R \cup T) = v \left(\bigcup_{h \in R} P_h \cup T \right) \text{ para todo } R \subset M \setminus \{k\} \text{ y } T \subset P_k.$$

Más aún, Laruelle y Valenciano (2004) mostraron que el valor de Banzhaf-Owen admitía una triple interpretación cuando trataban de responder a la pregunta de cuál es la relevancia o decisibilidad de cada jugador i si las decisiones se toman de acuerdo a una regla de votación, y por tanto los jugadores están inmersos en un juego TU, y los votantes de cada unión de la partición P distinta de la que contiene al votante i actúan como un bloque (i.e., el voto no se divide dentro de cualquiera de las otras uniones). Concretamente, el valor de Banzhaf-Owen se puede interpretar como el valor de Banzhaf de un juego modificado, o bien como un valor de Banzhaf modificado del juego de partida o, por último, como un valor de Banzhaf generalizado de un juego generalizado. Sostienen que una triple interpretación similar es problemática para otros valores. No obstante, el valor de Owen admite la segunda y tercera interpretación, sustituyendo el valor de Banzhaf por el valor de Shapley.

En este trabajo estudiaremos el valor coalicional que asigna a cada jugador el valor de Shapley del mismo juego modificado considerado por Laruelle y Valenciano. Admite así una interpretación similar a la primera. También admite, como veremos, la segunda de las interpretaciones. Comenzaremos definiéndolo.

Definición El *valor coalicional* Γ se define como

$$\Gamma_i(N, v, P) = \sum_{R \subset M \setminus \{k\}} \sum_{T \subset P_k \setminus \{i\}} \frac{(r+t)!(m+p_k-r-t-2)!}{(m+p_k-1)!} [v(Q \cup T \cup \{i\}) - v(Q \cup T)]$$

para todo $i \in N$ y $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$, donde $P_k \in P$ es la unión tal que $i \in P_k$.

Proposición Para todo $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$ y cada jugador $i \in P_k$, $P_k \in P$,

$$\Gamma_i(N, v, P) = \varphi_i \left(M \setminus \{k\} \cup P_k, v^{M \setminus \{k\} \cup P_k} \right).$$

El valor coalicional Γ admite la siguiente interpretación heurística. Consideremos un jugador $i \in P_k$, sea π una permutación de jugadores en N en la cual los jugadores en P_h , $h \neq k$, actúan como un bloque, y $\Pi^*(N)$ el conjunto de tales permutaciones. Denotaremos por $B^\pi(i) = \{j \in N \text{ tal que } \pi(j) < \pi(i)\}$ el conjunto de jugadores que preceden a i con el orden dado por π . Suponemos que: 1. Los jugadores acuerdan acudir a un cierto punto de negociación. 2. Todos los posibles órdenes de llegada en los que los jugadores de P_h , $h \neq k$, actúan como un bloque, i. e. acuden siempre de

forma consecutiva, son equiprobables. 3. Cuando llega un jugador, recibe como pago su contribución marginal a la coalición formada por los jugadores que llegaron antes que él. Entonces, se tiene:

Proposición Para todo $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$ y cada jugador $i \in P_k$, $P_k \in P$,

$$\Gamma_i(N, v, P) = \frac{1}{(m + p_k - 1)! \prod_{h=1, h \neq k}^m p_h!} \sum_{\pi \in \Pi^*(N)} [v(B^\pi(i) \cup \{i\}) - v(B^\pi(i))].$$

De esta forma, el valor Γ se puede ver como un valor de Shapley modificado del juego inicial.

4. CARACTERIZACIÓN AXIOMÁTICA DE Γ

A continuación presentamos varias propiedades para un valor coalicional g y que nos serán de gran utilidad para caracterizar nuestro valor Γ .

- A1.** (*Eficiencia*). Para todo $(N, v) \in G(N)$, $\sum_{i \in N} g_i(N, v, P^n) = v(N)$.
- A2.** (*Simetría*). Si $i, j \in N$ son jugadores simétricos en $(N, v) \in G(N)$, entonces $g_i(N, v, P^n) = g_j(N, v, P^n)$.
- A3.** (*Contribuciones marginales idénticas*). Si (N, v) y (N, w) son juegos TU con un conjunto de jugadores común N , y algún jugador $i \in N$ satisface $v(S \cup \{i\}) - v(S) = w(S \cup \{i\}) - w(S)$ para todo $S \subset N \setminus \{i\}$, entonces $g_i(N, v, P^n) = g_i(N, w, P^n)$.
- A4.** (*Neutralidad ante abandonos individuales*). Si $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$, $P_k \in P$, y $i, j \in P_k$, $i \neq j$, entonces $g_i(N, v, P) = g_i(N, v, P_{-j})$.
- A5.** (*Propiedad del juego 1-cociente*). Si $(N, v, P) \in G^{cs}(N)$ y $P \in P(i)$ para algún $i \in N$, entonces $g_i(N, v, P) = g_k(M, v^P, P^m)$, donde $P_k = \{i\}$.

Las propiedades de eficiencia, simetría y contribuciones marginales idénticas son estándar en la literatura. Aquí las usaremos en el contexto de los juegos TU con una estructura de coaliciones trivial. Para una discusión detallada de las propiedades A4 y A5, basta dirigirse a Alonso-Meijide et al. (2007).

Proposición Un valor coalicional g satisface A1, A2 y A3 si, y sólo si, es un valor coalicional de Shapley, i.e.

$$g_i(N, v, P^n) = \varphi_i(N, v) \text{ para todo } i \in N \text{ y todo } (N, v) \in G(N).$$

Teorema Γ es el único valor coalicional que satisface A1-A5. Equivalentemente, Γ es el único valor coalicional de Shapley que satisface A4 y A5.

Observación Las propiedades usadas en el teorema anterior son lógicamente independientes.

5. EXTENSIÓN MULTILINEAL DE Γ

Comenzaremos esta sección introduciendo el procedimiento mediante el cual podemos obtener la extensión multilineal del valor coalicional Γ .

Sea (N, v) un juego con estructura coalicional $P = \{P_1, \dots, P_m\}$. Puede calcularse Γ_i , $i \in P_k$, siguiendo los siguientes pasos:

1. Obtener la extensión multilineal $f(q_1, \dots, q_n)$ del juego (N, v) .
2. Para todo $h \neq k$ y para todo $i \in P_h$, reemplazar la variable q_i por p_h . Se obtiene así una nueva función de q_i , $i \in P_k$, y p_h , $h \neq k$.
3. En la función obtenida en 2., se deben de reducir todos los exponentes a 1, i.e., reemplazar cada p_h^n con $n \geq 1$, por p_h . Con esto se ha obtenido una nueva función multilineal:

$$g((q_i)_{i \in P_k}, (p_h)_{h \neq k}).$$

4. Finalmente, para obtener el valor coalicional Γ , calcular:

$$\Gamma_i(N, v, P) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial q_i}(t, \dots, t) dt.$$

Proposición El procedimiento 1.-4. nos conduce al cálculo del valor coalicional Γ .

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación proporcionada por el Ministerio de Educación y Ciencia y el FEDER a través de los Proyectos ECO2008-03484-C02-01 y ECO2008-03484-C02-02, del Ministerio de Ciencia e Innovación a través de los Proyectos ECO2011-23460 y MTM2011-27731-C03-02 y de la Xunta de Galicia a través del Proyecto INCITE09-207-064-PR.

REFERENCIAS

- Alonso-Meijide, J. M., Carreras, F., Fiestras-Janeiro, M. G. and Owen, G. (2007) A comparative axiomatic characterization of the Banzhaf-Owen coalitional value. *Decision Support Systems*, 43, 701-712.
- Banzhaf, J. F. (1965) Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.
- Laruelle, A. and Valenciano, F. (2004) On the meaning of Owen-Banzhaf coalitional value in voting situations. *Theory and Decision*, 56, 113-123.
- Owen, G. (1972) Multilinear extensions of games. *Management Science*, 18, 64-79.
- Owen, G. (1977) Values of games with a priori unions. In: Henn, R. and Moeschlin, O. (Eds.), *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer, Berlin, 76-88.
- Owen, G. (1982) Modification of the Banzhaf-Coleman Index for games with a priori unions. In: Holler, M. J. (Ed.), *Power, Voting and Voting Power*, Physica-Verlag, Würzburg, 232-238.
- Shapley, L. S. (1953) A value for n-person games. In: Kuhn, H. W. and Tucker, A. W. (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 307-317.